

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

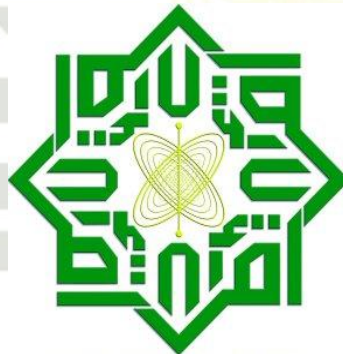
**MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN
MENGUNAKAN KOMBINASI RATA-RATA LEHMER
DENGAN $p = 1$ DAN $p = 2$**

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

MARDIAH MUNTHER
11654200429



UIN SUSKA RIAU

UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019**



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSETUJUAN

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN MENGUNAKAN KOMBINASI RATA-RATA LEHMER DENGAN $p = 1$ DAN $p = 2$

TUGAS AKHIR

oleh:

MARDIAH MUNTHE
11654200429

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Desember 2019

Ketua Program Studi

Ari Pani Desvina, M.Sc.
NIP. 19811225 200604 2 003

Pembimbing

Wartono, M.Sc.
NIP. 19730818 200604 1 003



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PENGESAHAN

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN MENGUNAKAN KOMBINASI RATA-RATA LEHMER DENGAN $p = 1$ DAN $p = 2$

TUGAS AKHIR

oleh:

MARDIAH MUNTHE
11654200429

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 19 Desember 2019

Pekanbaru, 19 Desember 2019
Mengesahkan,

Ketua Program Studi

Ari Pani Desvina, M.Sc.
NIP. 19811225 200604 2 003



Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.
NIP. 19660604 199203 1 004

DEWAN PENGUJI

Ketua : Fitri Aryani, M.Sc.
Sekretaris : Wartono, M.Sc.
Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.
Anggota II : Irma Suryani, M.Sc.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 19 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

MARDIAH MUNTHE
11654200429

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

"Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat"

∞(QS. Al-Mujadalah:11)∞

Alhamdulillahirrabil'alamin

Atas segala nikmat, kesempatan, kemudahan, dan pencapaian yang telah aku peroleh hingga saat ini.

*****Sujud syukurku, kupersembahkan kepada Allah SWT*****

Pemberi maaf yang tak pernah bosan, pemberi limpahan kasih sayang, satu-satunya penolong, tempatku berdo'a dan berharap. Terima kasih yaa ALLAH SWT atas segala kenikmatan yang telah Engkau berikan kepadaku. Ampunilah segala dosa-dosaku ya Rabb..

Tugas Akhir ini ku persembahkan untuk:

*****Ayahku Sahnan Munthe dan Mamak Patimah*****

Ayah, mak, Alhamdulillah akhirnya anakmu sarjana. Salah satu keinginanmu untukku akhirnya terwujud. Terima kasih atas segala do'a dan dukungan yang selalu kalian berikan walaupun ucapan terimakasihku tak cukup membalas semua kasih sayangmu kepadaku.

Terima kasih Ayah, Terima kasih mak...

*****Abang Amin, kak Ira, abang Bambang, abang Dedek, kak Dani, abang Asan, kak Mimi dan abang Wahyudi *****

Terima kasih telah menjadi panutan yang memberikan ku motivasi untuk terus berjuang demi membahagiakan kedua orang tua kita.

*****Dosen Pembimbingku Bapak Wartono, M.Sc dan Dosen-Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi*****

Terima kasih atas waktu dan tenaga yang telah kalian berikan untuk membimbing saya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

*****Sahabat-Sahabatku*****

Terima kasih untuk meli, andika, resti, tam-tam, ayu, widya, inal, sampurno, edy dan antoni yang telah mendukung, menasehati, dan memberikan semangat yang luar biasa selama ini. Terimakasih sudah kebersamaan.

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN MENGUNAKAN KOMBINASI RATA-RATA LEHMER DENGAN $p = 1$ DAN $p = 2$

MARDIAH MUNTHER
11654200429

Tanggal Sidang : 19 Desember 2019
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) adalah salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu. Penelitian ini membahas Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer (RKKuCCL) dengan $p = 1$ dan $p = 2$ dengan tujuan untuk mendapatkan varian dari persamaan RKKu. Modifikasi Metode RKKu diperoleh dengan menggantikan rata-rata aritmatik pada persamaan konveks rata-rata Lehmer untuk nilai $p = 1$ dan $p = 2$. Selanjutnya, diperoleh galat pemotongan dan nilai kestabilan dari RKKuCCL pada orde lima. Simulasi numerik dilakukan pada dua contoh soal untuk menguji galat yang diperoleh dan hasilnya menunjukkan bahwa galat dari Modifikasi Metode RKKuCCL lebih baik daripada Metode RKKu, RKKuG, dan RKKuH untuk persamaan diferensial $y' = y$ pada $\alpha = 0,2$ dan untuk persamaan diferensial $y' = 1/y$, galat Modifikasi Metode RKKu lebih baik daripada Metode RKKuCCL.

Kata kunci: Deret Taylor, galat, kombinasi konveks, metode Runge-Kutta Kuntzmann, rata-rata Lehmer

UIN SUSKA RIAU

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

MODIFICATION OF RUNGE-KUTTA KUNTZMANN METHOD USING COMBINATION OF LEHMER MEANS WITH $P = 1$ AND $P = 2$

MARDIAH MUNTHER
11654200429

Date of Final Exam : 19th December 2019
Date of Graduation :

*Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru*

ABSTRACT

Fourth order Kuntzmann Runge Kutta method (RKKu) is one of numerical method used to solve first order differential equation. In this research describe about modification of Runge Kutta fourth order method using combination of Lehmer means (RKKuCCL) with $p = 1$ and $p = 2$ in order to obtain a variant of the RKKu equation. Modification of RKKu method using combination of Lehmer means (RKKuCCL) obtained by replacing arithmetic means with convex combination Lehmer means for $p = 1$ and $p = 2$. Based on the result study, the truncation error and stability value of RKKuCCL were obtained at the fifth order. Numerical simulations are performed on two sample problems to test the truncation error obtained and the results shows that the errors from the Modified RKKuCCL Method are better than RKKu, RKKuG, and RKKuH method for $y' = y$ at $\alpha = 0,2$ while for differential equation $y' = 1/y$, the error of RKKu is better than RKKuCCL method.

Keywords: *Convex combination, error, Lehmer's means, Runge-Kutta Kuntzmann method, Taylor's series.*

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wa Ta'ala atas rahmat, karunia, nikmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Menggunakan Kombinasi Rata-Rata Lehmer Dengan $p=1$ dan $p=2$ ”**.

Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Shalallahu 'Alahi Wasallam, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Sahnan Munthe dan mamak tersayang yaitu Patimah yang dengan tulus selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, S.Ag, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Bapak Dr. Rado Yandra, S.Si, M.Sc selaku Pembimbing Akademik Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
6. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

7. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Ibu Irma Suryani, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
9. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
10. Abang Amin, Kak Ira, Abang Bambang, Abang Dedek, Kak Dani, Abang Asan, Kak Mimi, dan Abang Yudi yang selalu Mendo'akan, mendukung, dan memotivasi penulis.
11. Sahabat-sahabat penulis Andika Riski, Meli Ermanita, Resti Molina, Sri Utami Wahyuni Zain, terima kasih atas bantuan, masukan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada penulis.
12. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Kelas B angkatan 2016 yang telah banyak memberikan bantuan, masukan serta dukungan.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin.*

Pekanbaru, Desember 2019

UIN SUSKA RIAU

Mardiah Munthe

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvi
DAFTAR SINGKATAN.....	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-2
1.3 Batasan Masalah	I-2
1.4 Tujuan Penelitian	I-3
1.5 Manfaat Penelitian	I-3
1.6 Sistematika Penulisan	I-3
 BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Persamaan Differensial Biasa Orde Satu	II-1
2.2 Deret Taylor	II-3
2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat.....	II-6
2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann	II-9
2.5 Galat Pemotongan	II-10

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.6	Kestabilan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann	II-11
2.7	Rata-rata Lehmer	II-13
2.8	Kombinasi Konveks	II-13

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4.1	Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Menggunakan Kombinasi Rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$	IV-1
4.2	Galat Metode Runge-Kutta Kuntzmann Menggunakan Kombinasi Rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$	IV-10
4.3	Kestabilan Metode Runge-Kutta Kuntzmann Menggunakan Kombinasi Rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$	IV-11
4.4	Simulasi Numerik	IV-14

BAB V PENUTUP

5.1	Kesimpulan	V-1
5.2	Saran	V-3

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR GAMBAR

	Gambar	Halaman
2.1	Daerah kestabilan metode runge-kutta orde empat kuntzmann..	II-12
2.2	Kurva konveks dan tidak konveks	II-14
4.1	Daerah kestabilan hasil modifikasi Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$ untuk $\alpha = 0,9$, $\alpha = 0,3$, $\alpha = 0,2$, $\alpha = 10^{-2}$ dan $\alpha = 10^{-7}$	IV-13
4.2	Daerah kestabilan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu)	IV-13
4.3	Perbandingan daerah kestabilan RKKuCCL dan RKKu	IV-14
4.4	Grafik Perbandingan Galat untuk beragam nilai α	IV-15
4.5	Perbandingan Galat RKKuCCL, RKKu, RKKuG dan RKKuH.	IV-16
4.6	Grafik Perbandingan Galat untuk beragam nilai α	IV-18
4.7	Perbandingan Galat RKKuCCL, RKKu, RKKuCoH dan RKKuH	IV-19

DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
Tabel 2.1 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde- n	II-6
Tabel 2.2 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde Empat.....	II-7
Tabel 2.3 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann	II-10
Tabel 4.1 Perbandingan galat metode RKKuCCL persamaan diferensial $y' = y$	IV-15
Tabel 4.2 Perbandingan galat metode RKKuCCL, RKKu, RKKuG dan RKKuH untuk persamaan diferensial $y' = y$	IV-16
Tabel 4.3 Perbandingan galat metode RKKuCCL untuk persamaan dif- ferensial $y' = 1/y$	IV-17
Tabel 4.4 Perbandingan galat metode RKKuCCL, RKKu, RKKuCoH dan RKKuH untuk persamaan diferensial $y' = 1/y$	IV-18

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR SIMBOL

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

x_0	: Nilai awal
$f(x)$: Fungsi dengan variabel bebas x
f'	: Turunan pertama fungsi f
f''	: Turunan kedua fungsi f
$f^{(n)}$: Turunan ke- n fungsi f
E	: Deret Taylor
$R_n(x)$: Suku sisa deret Taylor
λ	: Koefisien
$!$: Faktorial
α	: Koefisien kombinasi Konveks rata-rata Lehmer

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
A. Nilai Parameter Metode RKKuCCL	A-1
B. Galat Metode RKKuCCL	B-1
C. Kestabilan Metode RKKuCCL	C-1
D. Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y' = y$ Menggunakan Metode RKKuCCL, RKKu, RKKuG dan RKKuH....	D-1
E. Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y' = 1/y$ Menggunakan Metode RKKuCCL, RKKu, RKKuCoH dan RKKuH	E-1

DAFTAR SINGKATAN

RKKu	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann
RKKuH	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Harmonik
RKKuG	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Geometri
RKKuCoH	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Kontra Harmonik
RKKuCCL	: Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Kombinasi rata-rata Lehmer



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang fisika, ekonomi, sains dan teknologi, kimia, biologi dan lain-lain seringkali melibatkan persamaan matematika. Persamaan matematika yang paling sering digunakan adalah dalam bentuk persamaan differensial. Persamaan differensial yang paling sering dibahas adalah persamaan differensial biasa orde satu. Persamaan differensial orde satu memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Solusi dari Persamaan (1.1) dapat diperoleh dengan menggunakan metode analitik ataupun metode numerik. Metode analitik adalah metode yang dapat memberikan solusi eksak dengan galat sama dengan nol, sedangkan metode numerik adalah metode yang memberikan solusi hampiran yang mendekati solusi eksak. Akan tetapi, solusi dari persamaan matematika yang cukup rumit kadang tidak dapat diperoleh dengan menggunakan metode analitik sehingga harus menggunakan metode numerik. Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan matematika dalam bentuk Persamaan (1.1) adalah Metode Euler, Metode Heun, Metode Taylor, dan Metode Runge-Kutta.

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang lebih sering digunakan sekaligus lebih praktis untuk menemukan solusi dari persamaan matematika jika dibandingkan dengan metode-metode lainnya karena tidak membutuhkan perhitungan turunan dan memiliki galat yang lebih kecil. Metode Runge-Kutta memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan nilai parameter bebasnya diantaranya, Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill, dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (Lapidus, 1971).

Modifikasi metode Runge-Kutta Orde Empat telah banyak dilakukan oleh para peneliti, diantaranya (Evans, 1991) menuliskan persamaan metode Runge-

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Kutta orde empat klasik menjadi persamaan yang mengandung unsur aritmatik lalu mengganti deret aritmatik tersebut dengan deret geometri sehingga menghasilkan metode Runge-Kutta baru berdasarkan deret geometri, (Sanugi dan Evans, 1994) menghasilkan metode Runge-Kutta yang baru berdasarkan deret harmonik, (Evans dan Yaakub, 1995) menggunakan rata-rata kontra harmonik, (Yaacob dan Sanugi, 1998) menggabungkan antara rata-rata aritmatik dengan harmonik, (Murugesan dkk, 2002) mengkombinasikan antara rata-rata aritmatik dan centroidal.

Modifikasi Runge-Kutta orde tiga dengan mengkombinasikan rata-rata Lehmer $p = 0$ dan $p = 3$ telah dilakukan oleh (Jayanti, 2018), selanjutnya (Ulfa dan Wartono, 2019) mengganti rata rata aritmatik pada Runge-Kutta orde empat klasik dengan kombinasi rata-rata Lehmer $p = 1$ dan $p = 4$. Selain itu (Mirna, 2013) memodifikasi Runge Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik, (Nasution, 2013) memodifikasi Runge Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata kontra harmonik, dan (Yuliarni, 2013) memodifikasi Runge Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata geometri.

Berdasarkan tinjauan literatur, modifikasi terhadap Runge-Kutta Kuntzmann hanya menggunakan satu jenis rata-rata. Oleh karena itu maka penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian modifikasi metode Runge-Kutta Kuntzmann dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann Menggunakan Kombinasi Rata-Rata Lehmer Dengan $p = 1$ dan $p = 2$ ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan rumusan baru, galat, serta kestabilan dari Modifikasi Metode Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini yaitu hanya menggunakan Metode Runge-Kutta Kuntzmann, kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$, persamaan differensial biasa orde satu.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Mendapatkan Rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta Kuntzmann dengan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$.
2. Menentukan galat dan kestabilan metode Runge-Kutta Kuntzmann dengan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian tugas akhir ini adalah:

1. Meningkatkan kemampuan penulis maupun pembaca untuk mengembangkan atau memodifikasi bentuk metode numerik sebagai penyelesaian permasalahan matematika khususnya persamaan diferensial orde satu.
2. Hasil penelitian dapat digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial orde satu.
3. Hasil penelitian dapat dijadikan bahan untuk mengembangkan metode lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi teori-teori yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir ini.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi langkah langkah yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir ini.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan dari hasil penelitian.

BAB V Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan tentang persamaan diferensial biasa orde satu, deret Taylor, metode Runge-Kutta orde empat, metode Runge-Kutta Kuntzmann, galat pemotongan serta kestabilan metode Runge-Kutta Kuntzmann, deret Lehmer, dan kombinasi konveks.

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat (*dependent variable*) terhadap satu atau lebih variabel bebas (*independent variable*). Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasikan berdasarkan orde. Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial tersebut. Bentuk baku persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai berikut:

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan $y' = \frac{dy}{dx}$.

Persamaan diferensial biasa orde satu yang tidak mengikuti bentuk baku tersebut harus ditulis ulang menjadi bentuk Persamaan (2.1) agar dapat diselesaikan secara numerik.

Contoh 2.1 (Purcell, 2008) Tentukan penyelesaian khusus dari

$$\frac{dy}{dx} - 3y = xe^{3x} \quad y(0) = 4.$$

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan tersebut, maka diperoleh $p(x) = -3$ dan $f(x) = xe^{3x}$, sehingga faktor integral yang sesuai adalah:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int (-3)dx} = e^{-3x}$$

Dari perkalian dengan faktor integral ini, persamaan kita mengambil bentuk:

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = x$$

dengan mengintegralkan kedua ruas, maka

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$e^{-3x} y = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

Jadi, penyelesaian umum adalah:

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + C e^{3x}$$

Dengan mensubstitusikan $y = 4$ ketika $x = 0$ membuat $C = 4$. Penyelesaian khusus yang diinginkan adalah:

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + 4e^{3x}.$$

Terdapat dua cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu, yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode Analitik adalah metode sejati karena ia memberi kita solusi sejati (*exact solution*) atau solusi sesungguhnya yang memiliki galat sama dengan nol. Metode Numerik digunakan untuk persoalan rumit yang sering muncul dan sulit, atau tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik.

Penyelesaian persamaan differensial biasa secara numerik berarti menghitung nilai fungsi di $x_{r+1} = x_r + h$, dengan nilai h adalah ukuran langkah (*step*) dari iterasi. Pada metode analitik, nilai awal berfungsi untuk memperoleh solusi yang unik, sedangkan pada metode numerik nilai awal (*initial value*) pada Persamaan (2.1) berfungsi untuk memulai iterasi. Terdapat beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi persamaan differensial biasa, mulai dari metode yang paling dasar sampai dengan metode yang lebih teliti, yaitu:

1. Metode Euler
2. Metode Heun
3. Metode Deret Taylor
4. Metode Runge-Kutta

Contoh 2.2 Berikut diberikan persamaan differensial biasa

$$y' = 2xy, \quad y(1) = 1.$$

Gunakan metode Euler untuk menghampiri $y(1,5)$ dengan $h = 0,1$ dan $h = 0,05$.

Penyelesaian

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Langkah pertama adalah menulis kembali persamaan menjadi $f(x, y) = 2xy$, oleh karena itu,

$$y_{n+1} = y_n + h(2x_n y_n)$$

Untuk $h = 0.1$,

Dari soal diperoleh $x_0 = 1, y_0 = 1$, maka dapat kita peroleh langkah ke-1,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h(2x_0 y_0) \\ &= 1 + (0,1)[2(1)(1)] \\ &= 1,2. \end{aligned}$$

dan,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h(2x_1 y_1) \\ &= 1,2 + (0,1)[2(1,1)(1,2)] \\ &= 1,464. \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $h = 0.05$, dengan $x_0 = 1, y_0 = 1$,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h(2x_0 y_0) \\ &= 1 + (0,05)[2(1)(1)] \\ &= 1,1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h(2x_1 y_1) \\ &= 1,1 + (0,05)[2(1,05)(1,1)] \\ &= 1,2155. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + h(2x_2 y_2) \\ &= 1,2155 + (0,05)[2(1,1)(1,2155)] \\ &= 1,349205. \end{aligned}$$

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor adalah deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial. Deret Taylor dapat memberikan solusi hampiran atau solusi yang mendekati solusi sebenarnya dari suatu fungsi $f(x)$ dalam bentuk polinomial.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Teorema 2.1 (Purcell, 2008) Misalkan f adalah fungsi kontinu dimana turunan ke- $(n + 1)$ nya pada setiap x dalam interval terbuka I yang mengandung a . Maka untuk setiap $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x) . \quad (2.2)$$

dengan sisa (galat) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}. \quad (2.3)$$

dengan c adalah suatu titik antara x dan a . ■

Pembuktian teorema Deret Taylor dapat dilihat pada buku Purcell (2008), halaman 107-108.

Persamaan (2.3) merupakan sisa (galat) dari deret Taylor. Sehingga, jika $P_n(x)$ adalah polinomial deret Taylor, maka diperoleh:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \quad (2.4)$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Ekspansi deret Taylor dapat digunakan pada penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ atau } y' = f(x, y). \quad (2.5)$$

Untuk menghitung nilai hampiran y_{n+1} maka nilai dari y'' , y''' , dan $y^{(n)}$ harus dicari terlebih dahulu. Berdasarkan Persamaan (2.5) maka bentuk turunan persamaan diferensial berikutnya, yaitu:

$$\begin{aligned} y'' &= f'(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \\ &= f_x + f f_y, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$y''' = f''(x, y)$$

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial x} (f_x + f f_y) + \frac{\partial}{\partial y} f (f_x + f f_y) \frac{dy}{dx} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (f_x + f f_y) + \frac{\partial f}{\partial y} (f_x + f f_y) f \\
 &= f_{xx} + f_x f_y + f_{yx} f + f (f_{xy} + f_y f_y + f f_{yy}) \\
 &= f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy} f^2,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 y^{(4)} &= f'''(x, y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy} f^2) + \frac{\partial}{\partial y} f (f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy} f^2) \frac{dy}{dx} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f_y^2 + f_{yy} f^2) + \frac{\partial f}{\partial y} (f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f_y^2 + f_{yy} f^2) f \\
 &= f_{xxx} + f_{xx} f_y + f_x f_{xy} + 2f_x f_{xy} + 2f f_{xxy} + f_x f_y^2 + f f_{xy} f_y + f f_y f_{xy} + f f_x f_{yy} + f_x f f_{yy} + f^2 f_{xyy} + f (f_{xxy} + f_{xy} f_y + f_x f_{yy} + 2f_y f_{xy} + 2f f_{xyy} + f_y^3 + 2f f_y f_{yy} + 2f f_y f_{yy} + f_{yyy} f^2) \\
 &= f_{xxx} + f_{xx} f_y + 3f_x f_{xy} + 3f f_{xxy} + f_x f_y^2 + 5f f_y f_{xy} + 3f f_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3 + f^3 f_{yyy}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Menggunakan deret Taylor dengan mengekspansikan y_{i+1} disekitar y_i maka diperoleh:

$$y_{i+1} = y_i + h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \dots \tag{2.9}$$

Jika Persamaan (2.5), (2.6), (2.7) dan (2.8) disubstitusikan ke Persamaan (2.9) maka deret Taylornya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + h f + \frac{h^2}{2!} (f_x + f f_y) + \frac{h^3}{3!} (f_{xx} + f_x f_y + 2f f_{xy} + f f_y^2 + f_{yy} f^2) \\
 &\quad + \frac{h^4}{4!} (f_{xxx} + f_{xx} f_y + 3f_x f_{xy} + 3f f_{xxy} + f_x f_y^2 + 5f f_y f_{xy} + 3f f_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3 + f^3 f_{yyy}) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

dengan hanya mengambil turunan terhadap y pada Persamaan (2.10), akan didapatkan:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2}ff_y + \frac{h^3}{6}(ff_y^2 + f_{yy}f^2) + \frac{h^4}{24}(4f^2f_yf_{yy} + f_y^3 + f^3f_{yyy}) + O(h^5). \quad (2.11)$$

2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Penyelesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan deret Taylor akan membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$. Oleh karena itu, Metode Runge-Kutta dapat digunakan sebagai alternatif lain dari metode deret Taylor karena tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode Runge-Kutta dapat menghasilkan derajat ketelitian yang lebih tinggi tanpa memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde- n adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n), \quad (2.12)$$

dengan,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + p_2h, y_n + hq_{21}k_1), \\ k_3 &= f(x_n + p_3h, y_n + hq_{31}k_1 + hq_{32}k_2), \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_n + p_nh, y_n + hq_{n1}k_1 + hq_{n2}k_2 + \dots + q_{n(n-1)}k_n). \end{aligned}$$

Bentuk umum Metode Runge-Kutta dapat ditunjukkan dalam tabel

Butcher berikut:

Tabel 2.1 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde- n

0	0	0	...	0	0
p_2	q_{21}	0	...	0	0
p_3	q_{31}	q_{32}	...	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
p_n	$q_{n,1}$	$q_{n,2}$...	$q_{n,n-1}$	0
	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n

Runge-kutta orde empat adalah Runge-Kutta dengan $n = 4$. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat memiliki bentuk umum, yaitu:

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4), \quad (2.13)$$

dengan,

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + p_2h, y_n + hq_{21}k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + p_3h, y_n + hq_{31}k_1 + hq_{32}k_2),$$

$$k_4 = f(x_n + p_4h, y_n + hq_{41}k_1 + hq_{42}k_2 + hq_{43}k_3).$$

Sehingga bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat dapat digambarkan ke dalam tabel Butcher berikut:

Tabel 2.2 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde Empat

0	0	0	0	0
p_2	q_{21}	0	0	0
p_3	q_{31}	q_{32}	0	0
p_4	q_{41}	q_{42}	q_{43}	0
	a_1	a_2	a_3	a_4

Berdasarkan Tabel 2.2 dapat dilihat bahwa Runge-Kutta orde empat memiliki tiga belas parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, p_2, p_3, p_4, q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, q_{43}$.

Nilai parameter-parameter tersebut dapat diperoleh dengan mengekspansi k_1, k_2, k_3, k_4 ke dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i hanya terhadap variabel y maka diperoleh:

$$k_1 = f(y_n), \quad (2.14)$$

$$k_2 = f(y_n + hq_{21}k_1), \quad (2.15)$$

$$k_3 = f(y_n + h(q_{31}k_1 + q_{32}k_2)), \quad (2.16)$$

$$k_4 = f(y_n + h(q_{41}k_1 + q_{42}k_2 + q_{43}k_3)). \quad (2.17)$$

maka ekspansi k_1, k_2, k_3, k_4 pada Persamaan (2.14) sampai (2.17) dalam bentuk deret Taylor, yaitu:

$$k_1 = f, \quad (2.18)$$

$$k_2 = f + hq_{21}ff_y + \frac{h^2}{2}q_{21}^2f^2f_{yy} + \frac{h^3}{6}q_{21}^3f^3f_{yyy} + \frac{h^4}{24}q_{21}^4f^4f_{yyyy}, \quad (2.19)$$

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$k_3 = f + h(q_{31} + q_{32})ff_y + h^2 \left(q_{21}q_{32}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{31} + q_{32})^2 f^2 f_{yy} + h^3 \left(\left(\frac{1}{2}q_{21}^2 q_{32} + q_{21}(q_{31} + q_{32})q_{32} \right) f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}(q_{31} + q_{32})^3 f^3 f_{yyy} \right) \right), \quad (2.20)$$

$$k_4 = f + h(q_{41} + q_{42} + q_{43})ff_y + h^2 \left((q_{21}q_{32}ff_y^2 + (q_{31} + q_{32})q_{43}ff_y^2) + \frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})^2 f^2 f_{yy} \right) + h^3 \left(\left(\frac{1}{2}q_{21}^2 q_{42}f^2 f_y f_{yy} + q_{43}q_{32}q_{21}ff_y^3 \right) + \left(\frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})(q_{31} + q_{32})q_{43}f^2 f_y f_{yy} \right) \left(\frac{1}{2}(q_{41} + q_{42} + q_{43})q_{43}q_{21}f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}(q_{41} + q_{42} + q_{43})f^3 f_{yyy} \right) \right). \quad (2.21)$$

Substitusikan Persamaan (2.18) sampai (2.21) ke Persamaan (2.13), kemudian bandingkan dengan deret Taylor pada Persamaan (2.11) untuk mendapatkan persamaan parameter, sehingga diperoleh:

$$a_2 q_{21} + a_3(q_{31} + q_{32}) + a_4(q_{41} + q_{42} + q_{43}) = \frac{1}{2}, \quad (2.22a)$$

$$a_2 q_{21}^2 + a_3(q_{31} + q_{32})^2 + a_4(q_{41} + q_{42} + q_{43})^2 = \frac{1}{3}, \quad (2.22b)$$

$$a_2 q_{21}^3 + a_3(q_{31} + q_{32})^3 + a_4(q_{41} + q_{42} + q_{43})^3 = \frac{1}{4}, \quad (2.22c)$$

$$a_3 q_{32} q_{21} + a_4 q_{42} q_{21} + a_4 q_{32}(q_{31} + q_{32}) = \frac{1}{6}, \quad (2.22d)$$

$$a_3 q_{32} q_{21}^2 + a_4 q_{42} q_{21}^2 + a_4 q_{32}(q_{31} + q_{32})^2 = \frac{1}{12}, \quad (2.22e)$$

$$a_3 q_{21} q_{32}(q_{31} + q_{32}) + a_4(q_{41} + q_{42} + q_{43})(q_{21} q_{42} + q_{43}(q_{31} + q_{32})) = \frac{1}{8}, \quad (2.22f)$$

$$a_4 q_{43} q_{32} q_{21} = \frac{1}{24}. \quad (2.22g)$$

Berdasarkan Persamaan (2.22a) sampai Persamaan (2.22g) terdapat 7 persamaan dan 13 parameter. Dengan mengambil 3 parameter bebas maka akan didapatkan bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann.

2.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann adalah metode Runge-Kutta dengan nilai parameter bebas sebagai berikut:

$$p_2 = \frac{2}{5}, p_3 = \frac{3}{5}, \text{ dan } p_4 = 1. \quad (2.23)$$

Selanjutnya substitusikan parameter p_2, p_3, p_4 pada Persamaan (2.23) dengan $p_2 = q_{21}, p_3 = q_{31} + q_{32}, p_4 = q_{41} + q_{42} + q_{43}$ seperti dalam Tabel Butcher (2.2) ke Persamaan (2.22a) sampai (2.22g) sehingga diperoleh nilai parameter sebagai berikut:

$$q_{21} = \frac{2}{5}, q_{31} = -\frac{3}{20}, q_{32} = \frac{3}{4}, q_{41} = \frac{19}{44}, q_{42} = -\frac{15}{44}, q_{43} = \frac{40}{44},$$

$$a_1 = \frac{55}{360}, a_2 = \frac{125}{360}, a_3 = \frac{125}{360}, a_4 = \frac{55}{360}. \quad (2.24)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan Persamaan (2.23) dan (2.24) ke Persamaan (2.13), akan diperoleh bentuk umum persamaan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360}(55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4), \quad (2.25)$$

dengan,

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{5}h, y_n + h\frac{2}{5}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3}{5}h, y_n - h\frac{3}{20}k_1 + h\frac{3}{4}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + h\frac{19}{44}k_1 - h\frac{15}{44}k_2 + h\frac{40}{44}k_3\right).$$

Setelah mendapatkan nilai-nilai parameter dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, maka bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dapat digambarkan dalam tabel Butcher sebagai berikut:

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Tabel 2.3 Tabel Butcher Runge-Kutta Orde-4 Kuntzmann

0	0	0	0	0
2	2	0	0	0
15	5			
3	3	3	0	0
15	-20	4		
1	19	15	40	0
	44	-44	44	
	55	125	125	55
	360	360	360	360

2.5 Galat Pemotongan

Penyelesaian suatu persamaan matematika menggunakan metode numerik akan memberikan solusi hampiran yang mendekati solusi sebenarnya. Selisih dari solusi hampiran dengan solusi sebenarnya disebut dengan galat. Semakin kecil galat maka akan semakin teliti solusi numerik yang diperoleh.

Galat pemotongan digunakan untuk mencari perbedaan nilai dari galat terhadap nilai sebenarnya yang terdapat pada aproksimasi pendekatan polinomial $n + 1$ data. Dengan mensubstitusikan polinomial $p + 1$ derajat ke dalam rumus orde p , maka kita dapat menghasilkan galat dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$T(x, h) = Ch^{p+1}y^{p+1}(\xi). \quad (2.26)$$

Proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ dengan mengaplikasikan algoritma dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x, y(x); h), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang tergantung terhadap x_n, y_n dan h yang digunakan. Misalkan $y(x)$ adalah solusi sebenarnya untuk persamaan differensial biasa, maka untuk setiap x galat pemotongan didefinisikan sebagai berikut:

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h) \quad (2.27)$$

maka dapat diperhatikan bahwa galat pemotongan dari metode Runge-Kutta untuk orde p adalah:

$$T(x, h) = O(h^{p+1}).$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Galat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan mengekspansikan nilai k_1, k_2, k_3, k_4 pada Persamaan (2.25) dalam bentuk deret Taylor sampai orde lima (h^5) seperti pada Persamaan (2.18) sampai Persamaan (2.21) lalu substitusikan ke Persamaan (2.25) sehingga diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + hf + \left(\frac{1}{2}ff_y\right)h^2 + \left(\frac{1}{6}ff_y^2 + \frac{1}{6}f_{yy}f^2\right)h^3 + \left(\frac{1}{24}f^3f_{yyy} + \frac{1}{6}f^2f_yf_{yy} + \frac{1}{24}ff_y^3\right)h^4 + \left(\frac{31}{36000}f^4f_{yyyy} + \frac{103}{1800}f^3f_yf_{yyy} + \frac{1}{30}f^3f_{yy}^2 + \frac{91}{880}f^2f_y^2f_y\right)h^5. \quad (2.28)$$

Kemudian bandingkan Persamaan (2.28) dengan ekspansi deret Taylor untuk y_{n+1} sampai orde lima (h^5), yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2!}ff_y + \frac{h^3}{3!}(ff_y^2 + f_{yy}f^2) + \frac{h^4}{4!}(f^3f_{yyy} + 4f^2f_yf_{yy} + ff_y^3) + \frac{h^5}{5!}(f^4f_{yyyy} + 11f^3f_yf_{yyy} + 7f^3f_{yy}^2 + ff_y^4) \quad (2.29)$$

Sehingga dengan mencari selisih dari Persamaan (2.28) dan Persamaan (2.29) diperoleh galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, yaitu:

$$Galat = \frac{h^5}{39600}(11f^4f_{yyyy} - 44f^3f_yf_{yyy} - 330ff_y^4 + 465f^2f_y^2f_{yy}) \quad (2.30)$$

2.6 Kestabilan Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Teorema 2.2 (Lapidus, 1971) $A(y)$ dikatakan stabil jika semua solusi cenderung menuju 0 dan $n \rightarrow \infty$ ketika diaplikasikan untuk h tetap dan $h > 0$ ke persamaan $y' = \lambda y$ dimana λ adalah sebuah bilangan konstan kompleks.

Analisis kestabilan dari metode Runge-Kutta Kuntzmann diperoleh dengan menyelesaikan persamaan diferensial,

$$y' = \lambda y, \text{ dengan nilai awal } y(0) = 1. \quad (2.31)$$

sebagai uji persamaan. Kestabilan dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (2.31) ke persamaan k_1, k_2, k_3, k_4 pada Persamaan (2.25) hanya terhadap variabel y , sehingga diperoleh:

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$k_1 = \lambda y_n, \quad (2.32)$$

$$k_2 = \lambda y_n + \frac{2}{5} h \lambda^2 y_n, \quad (2.33)$$

$$k_3 = \lambda y_n + \frac{3}{5} h \lambda^2 y_n + \frac{3}{10} h^2 \lambda^3 y_n, \quad (2.34)$$

$$k_4 = f(\lambda y_n + h \lambda^2 y_n + \frac{9}{22} h^2 \lambda^3 y_n + \frac{3}{11} h^3 \lambda^4 y_n). \quad (2.35)$$

Selanjutnya Persamaan (2.32) sampai Persamaan (2.35) disubstitusikan ke Persamaan (2.25), sehingga diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \lambda y_n h + \frac{1}{2} \lambda^2 y_n h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 y_n h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 y_n h^4 \quad (2.36)$$

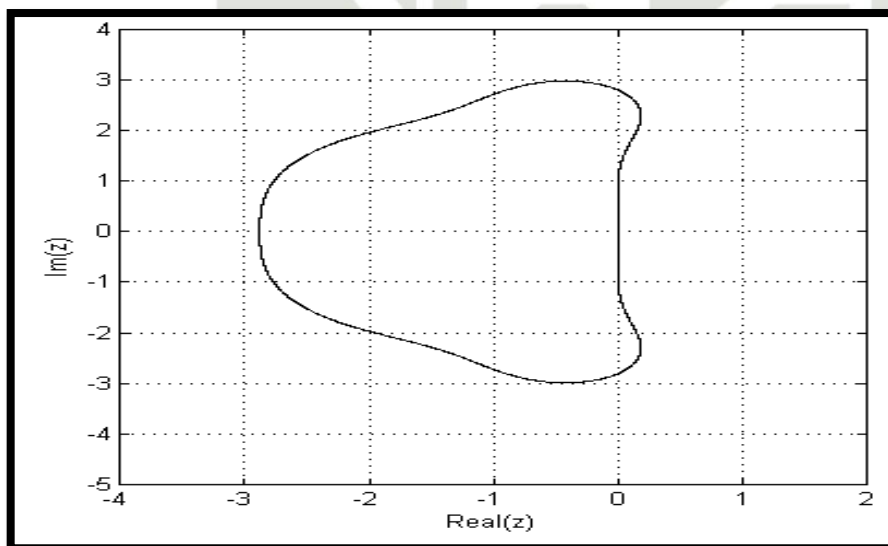
atau,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \lambda h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 h^4 \quad (2.37)$$

Misalkan $z = \lambda h$ disubstitusikan pada Persamaan (2.37), maka diperoleh polinomial stabilitas metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 \quad (2.38)$$

Persamaan (2.38) dapat diubah ke dalam bentuk grafik daerah kestabilan yang menunjukkan keakuratan metode RKKuCCL, sebagai berikut:



Gambar 2.1 Daerah kestabilan metode runge-kutta orde empat kuntzmann

2.7 Rata-rata Lehmer

Rata-rata aritmatika, rata-rata harmonik, dan rata-rata kontra harmonik merupakan salah satu bentuk dari rata-rata Lehmer. (Lehmer, 1971) menjelaskan bahwa untuk $(v, w) > 0$ dan $p \in \mathbb{R}$, maka rata-rata Lehmer orde p didefinisikan sebagai berikut:

$$L_p(v, w) = \frac{v^p + w^p}{v^{p-1} + w^{p-1}}. \quad (2.39)$$

Rata-rata Lehmer dengan $p = 0$ adalah rata-rata harmonik, dapat ditulis:

$$L_0(v, w) = \frac{2vw}{v + w}. \quad (2.40)$$

Rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ adalah rata-rata aritmatika, dapat ditulis:

$$L_1(v, w) = \frac{v + w}{2}. \quad (2.41)$$

Rata-rata Lehmer dengan $p = 2$ adalah rata-rata kontra harmonik, dapat ditulis:

$$L_2(v, w) = \frac{v^2 + w^2}{v + w}. \quad (2.42)$$

Contoh 2.3 Tentukan Rata-rata Lehmer untuk $p = 1$ dengan $v = 1$ dan $w = 2$.

Penyelesaian

Jika $p = 1$, $v = 1$ dan $w = 2$ maka berdasarkan Persamaan (2.39) diperoleh:

$$L_1(1, 2) = \frac{1^1 + 2^1}{1^{1-1} + 2^{1-1}},$$

sehingga,

$$L_1(1, 2) = \frac{1 + 2}{1^0 + 2^0} = \frac{1 + 2}{1 + 1} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}.$$

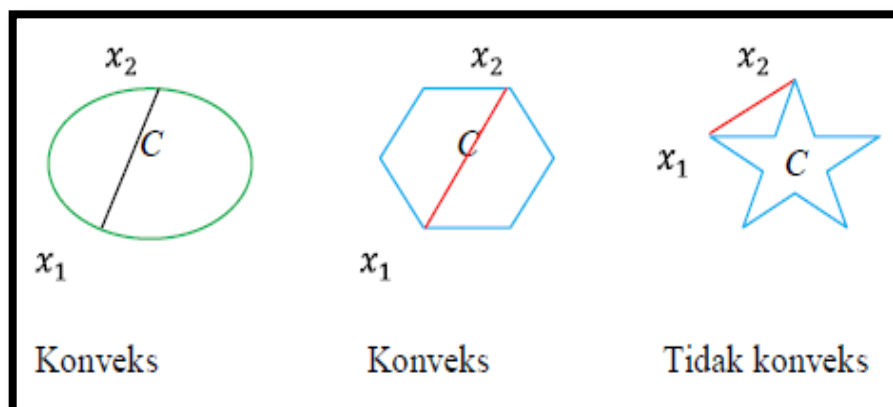
2.8 Kombinasi Konveks

Definisi 2.2 (Dahl, 2010) Sebuah himpunan $C \subseteq R^n$ adalah konveks jika segmen garis antara dua titik dalam C terletak di C . Misalkan untuk setiap $x_1, x_2 \in C$ dan untuk setiap λ dengan $0 \leq \lambda \leq 1$, maka:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C \quad (2.43)$$

Titik $x_1, \dots, x_k \in R^n$ dan $\lambda_j \geq 0$ untuk $j = 1, \dots, k$ sedemikian hingga $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ maka $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$ disebut kombinasi konveks dari $x_1, \dots, x_k \in R^n$. Pada saat $k = 2$ maka kombinasi konveks dari dua titik adalah $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 =$

$\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_2)x_2$. Berikut adalah contoh kurva dari himpunan konveks dan tidak konveks:



Gambar 2.2 Kurva konveks dan tidak konveks

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penyelesaian penelitian tugas akhir ini adalah metode studi pustaka yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian baik berasal dari buku-buku dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge-Kutta Kuntzmann, yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360} (55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4). \quad (3.1)$$

2. Metode Runge-Kutta Kuntzmann pada Persamaan (3.1) dibentuk menjadi persamaan yang memuat unsur aritmatik, yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36} \left(11 \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \frac{k_3 + k_4}{2} \right). \quad (3.2)$$

3. Mendefinisikan persamaan kombinasi konveks sebagai berikut:

$$CCL = (1 - \alpha)L_1 + \alpha L_2. \quad (3.3)$$

4. Mendefinisikan persamaan Lehmer sebagai berikut:

$$L_p(v, w) = \frac{v^p + w^p}{v^{p-1} + w^{p-1}}. \quad (3.4)$$

5. Mensubstitusikan $p = 1$ dan $p = 2$ ke dalam Persamaan (3.4) sehingga didapatkan:

$$L_1 = \frac{k_i + k_{i+1}}{2} \text{ dan } L_2 = \frac{k_i^2 + k_{i+1}^2}{k_i + k_{i+1}}. \quad (3.5)$$

6. Mensubstitusikan Persamaan (3.5) ke dalam Persamaan (3.3) sehingga menjadi persamaan kombinasi rata-rata Lehmer yaitu:

$$CCL = (1 - \alpha) \frac{k_i + k_{i+1}}{2} + \alpha \frac{k_i^2 + k_{i+1}^2}{k_i + k_{i+1}}. \quad (3.6)$$

7. Kemudian mengganti rata-rata aritmatika dalam Persamaan (3.2) dengan Persamaan (3.6) sehingga menghasilkan bentuk persamaan baru yaitu Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

8. Menentukan nilai parameter, galat dan kestabilan dari Runge-Kutta Kuntzmaan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$ menggunakan Maple.
9. Mengaplikasikan Metode Runge-Kutta Kuntzmaan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$ ke dalam contoh soal.



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dijabarkan pada bab-bab sebelumnya, telah dijelaskan mengenai Modifikasi Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer (RKKuCCL) dengan $p=1$ dan $p=2$. Dalam penyelesaian metode RKKuCCL untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial maka dilakukan pemisahan persamaan penyebut dan persamaan pembilang. Kemudian hasil yang diperoleh dibandingkan dengan ekspansi Deret Taylor sampai orde empat (h^4). Kemudian dengan membandingkan koefisien dari h^j diperoleh beberapa persamaan. Dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh nilai parameter $q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}$ dan q_{43} . Metode Runge Kutta Kuntzmann mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360} (55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4).$$

Setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer maka didapatkan:

1. Rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta Kuntzmann dengan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p=1$ dan $p=2$, yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{36} \left((1-\alpha) \left(11 \frac{k_1+k_2}{2} + 14 \frac{k_2+k_3}{2} + 11 \frac{k_3+k_4}{2} \right) + \alpha \left(11 \frac{k_1^2+k_2^2}{k_1+k_2} + 14 \frac{k_2^2+k_3^2}{k_2+k_3} + 11 \frac{k_3^2+k_4^2}{k_3+k_4} \right) \right).$$

dengan,

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{5}h, y_n + \frac{2}{5}k_1h\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + \left(-\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right)k_1h + \right.$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \right) k_2 h,$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + \left(\frac{53}{55}\alpha - \frac{43}{22} - \frac{7}{440}\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \right) k_1 h + \right.$$

$$\left. \left(-\frac{9}{5}\alpha + \frac{105}{22} + \frac{3}{88}\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \right) k_2 h + \right.$$

$$\left. \left(\frac{46}{55}\alpha - \frac{20}{11} - \frac{1}{55}\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \right) k_3 h \right).$$

2. Galat dan kestabilan dari modifikasi metode Runge-Kutta Kuntzmann dengan menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$, yaitu:

$$\text{galat} = \frac{h^5}{99000000} \left((-4259883\alpha^2 + 1414248\alpha^3 + 5129400\alpha - 825000) f_y^4 \right.$$

$$+ (21309\alpha - 21804\alpha^2) \sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f_y^4 + (679932$$

$$\alpha^2 - 3301200\alpha + 5482500) f_{yy} f_y^2 f_y^2 + (12036\alpha - 28800)$$

$$\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f_{yy} f_y^2 f_y^2 + (7700\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}$$

$$- 430100\alpha + 1045000) f_{yyy} f_y^3 f_y + (-1980000 + 1077450\alpha -$$

$$13200\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}) f_{yy}^2 f_y^3 + 27500 f_y^4 f_{yyyy} \Big) + O(h^6).$$

Selanjutnya kestabilan dari Metode RKKuCCL adalah sebagai berikut

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{33000000}\alpha(1419961\alpha - 471416\alpha^2 - 71$$

$$03\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} + 7268\alpha\sqrt{3554\alpha^2 - 13350\alpha + 22500})z^5.$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa galat dari metode Runge-Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer (RKKuCCL) dengan $p = 1$ dan $p = 2$ yang telah dimodifikasi memiliki keakuratan yang lebih baik karena memiliki galat yang lebih kecil jika dibandingkan dengan metode

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu), Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan rata-rata Geometri (RKKuG) maupun Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan rata-rata Harmonik (RKKuH) untuk persamaan $y' = y$, sedangkan untuk persamaan diferensial $y' = 1/y$ menunjukkan bahwa Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu), Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan rata-rata Geometri (RKKuG) maupun Runge-Kutta Kuntzmann Berdasarkan rata-rata Harmonik (RKKuH) memiliki keakuratan yang lebih baik jika dibandingkan dengan modifikasi RKKuCCL.

5.2 Saran

Penulisan tugas akhir ini penulis hanya membahas Modifikasi Metode Runge Kutta Kuntzmann menggunakan kombinasi rata-rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$, dan simulasinya hanya membandingkan empat metode. Sedangkan Metode Runge Kutta Kuntzmann dapat dimodifikasi menggunakan kombinasi variasi rata-rata yang lain. Oleh sebab itu, penulis menyarankan kepada para pembaca untuk mengembangkan hasil modifikasi pada tugas akhir ini menggunakan kombinasi variasi rata-rata yang berbeda maupun jenis metode Runge-Kutta yang lain dengan harapan dapat memperoleh solusi numerik yang lebih teliti dan akurat dalam menyelesaikan permasalahan matematis yang diberikan dalam bentuk persamaan diferensial.

UIN SUSKA RIAU

DAFTAR PUSTAKA

- Dahl, Geir. An. *"Introduction to Convexity"*. University of Oslo, Centre of Mathematics for Applications. 2010.
- D. H. Lehmer, "On the Compounding of Certain Means". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* . Vol.36, hal. 183-200, 1971.
- Evans, D. J. "A New 4th Order Runge-Kutta Method For Initial Value Problem With Error Control". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol.71, hal. 217-227, 1991.
- Evans, D. J. dan A.R. Yaakub. "A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Contra-Harmonic C_0M Mean". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol.57, hal. 249-256, 1995.
- Jayanti, E. D., M. Imran dan Syamsudhuha. "A Third Order Runge-Kutta Method Based on Convex Combination of Lehmer Means". *Journal of Mathematical and Computation Science*. Vol 8 no.6, hal. 673-682, 2018.
- Lapidus, L. dan J. H. Seinfeld. *"Numerical Solution of Ordinary Differential Equations"*. Academic Press, New York. 1971.
- Mirna. Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik. *Tugas Akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2013.
- Murugesan, K., Dhayabaran, D. P., Amirtharaj, C. H. dan Evans, D. J. "A Fourth Order Embedded Runge-Kutta RKACeM(4,4) Method Based on Arithmetic and Centroidal Means with Error Control". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol 79, hal. 247-269. 2002.
- Nasution, N. A. Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Kontra Harmonik. *Tugas Akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2013.
- Purcel, E.J., Dale Varberg, dan Steven E.R. *"Kalkulus Edisi Kesembilan"*. Jilid 1. Hal. 347. Penerbit Erlangga, Jakarta. 2008.
- Purcel, E.J., Dale Varberg, dan Steven E.R. *"Kalkulus Edisi Kesembilan"*. Jilid 2. Hal. 107-108. Penerbit Erlangga, Jakarta. 2008.
- Sanugi, B.B. dan D. J. Evans. "A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean". *International Journal of Computer Mathematics*. Vol. 50, hal. 113-118, 1994.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

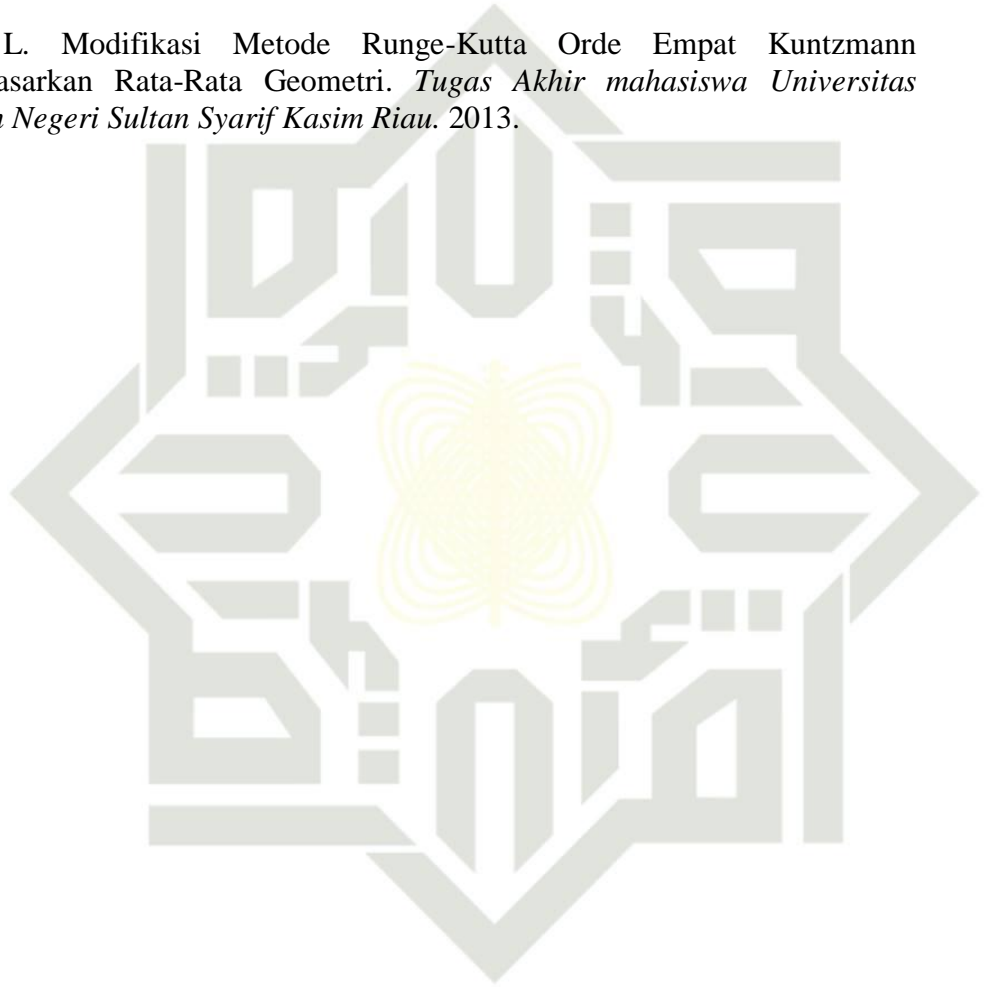
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Ulfa, F. dan Wartono. “Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik Menggunakan Deret Lehmer Dengan $p = 1$ dan $p = 4$ ”. *Prosiding SainsTekes Semnas MIPAKes UMRI*. Vol.1, 2019.

Yaacob, N. dan Bahrom Sanugi. “ A New Fourth-Order Embedded Method Based on the Harmonic Mean”. *Department of Mathematics, Universiti Teknologi Malaysia*. Jilid 14, hal. 1-6. 1998.

Yuliarni, L. Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Geometri. *Tugas Akhir mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2013.



UIN SUSKA RIAU



LAMPIRAN A

Nilai Parameter Metode RKKuCCL

> restart :

$$> q_{21} = \frac{2}{5};$$

$$q_{21} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

$$> eq_1 = 200 q_{31} + 200 q_{32} + 88 q_{42} + 88 q_{41} + 88 q_{43} + 200 q_{21} - 288;$$

$$eq_1 = 200 q_{31} + 200 q_{32} + 88 q_{42} + 88 q_{41} + 88 q_{43} - 208 \quad (2)$$

$$> eq_2 = 88 q_{41} q_{43} + 200 q_{31} q_{32} + 88 q_{42} q_{43} + 100 q_{32}^2 + 44 q_{42}^2 + 44 q_{43}^2 + 44 q_{41}^2 + 100 q_{21}^2 + 88 q_{41} q_{42} + 100 q_{31}^2 - 96;$$

$$eq_2 = 88 q_{41} q_{43} + 200 q_{31} q_{32} + 88 q_{42} q_{43} + 100 q_{32}^2 + 44 q_{42}^2 + 44 q_{43}^2 + 44 q_{41}^2 - 80 + 88 q_{41} q_{42} + 100 q_{31}^2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} > eq_3 = -96 - 144 q_{43} - 288 q_{21} + 200 q_{21}^2 - 288 q_{31} - 288 q_{32} - 144 q_{42} - 144 q_{41} + 100 \alpha q_{21}^2 + 88 \alpha q_{41} q_{43} - 88 \alpha q_{31} q_{42} - 88 \alpha q_{31} q_{41} - 88 \alpha q_{32} q_{42} \\ & - 88 \alpha q_{32} q_{41} - 112 \alpha q_{21} q_{31} - 112 \alpha q_{32} q_{21} + 200 \alpha q_{31} q_{32} - 88 \alpha q_{43} q_{31} + 88 \alpha q_{42} q_{43} - 88 \alpha q_{43} q_{32} + 88 \alpha q_{42} q_{41} + 44 \alpha q_{43}^2 + 100 \alpha q_{31}^2 + 44 \alpha q_{41}^2 \\ & + 100 \alpha q_{32}^2 + 44 \alpha q_{42}^2 + 44 \alpha q_{43}^2 + 400 q_{31} q_{32} + 88 q_{42} q_{43} + 88 q_{41} q_{42} + 88 q_{41} q_{43} + 188 q_{31} q_{42} + 188 q_{31} q_{41} + 276 q_{31} q_{43} + 188 q_{32} q_{42} + 188 q_{32} q_{41} \\ & + 276 q_{32} q_{43} + 600 q_{32} q_{21} + 276 q_{42} q_{21} + 188 q_{21} q_{41} + 188 q_{21} q_{43} + 400 q_{21} q_{31} + 200 q_{32}^2 + 200 q_{31}^2 + 44 q_{42}^2 + 44 q_{41}^2; \end{aligned}$$

$$eq_3 = -128 q_{31} - 48 q_{32} - \frac{168}{5} q_{42} - \frac{344}{5} q_{41} - \frac{344}{5} q_{43} + 200 q_{32}^2 + 44 q_{42}^2 + 44 q_{43}^2 + 44 q_{41}^2 + 200 q_{31}^2 + 88 q_{41} q_{43} + 400 q_{31} q_{32} + 88 q_{42} q_{43} + 88 q_{41} q_{42} + 16 \alpha \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & + 88 \alpha q_{41} q_{43} - 88 \alpha q_{31} q_{41} - 88 \alpha q_{31} q_{42} - 88 \alpha q_{32} q_{42} - 88 \alpha q_{32} q_{41} + 200 \alpha q_{31} q_{32} - 88 \alpha q_{43} q_{31} + 88 \alpha q_{42} q_{43} + 88 \alpha q_{42} q_{41} - 88 \alpha q_{43} q_{32} - \frac{224}{5} \alpha q_{31} \\ & - \frac{224}{5} \alpha q_{32} + 44 \alpha q_{43}^2 + 100 \alpha q_{31}^2 + 44 \alpha q_{41}^2 + 100 \alpha q_{32}^2 + 44 \alpha q_{42}^2 + 188 q_{31} q_{42} + 188 q_{31} q_{41} + 276 q_{31} q_{43} + 188 q_{32} q_{42} + 188 q_{32} q_{41} + 276 q_{32} q_{43} - \frac{896}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > eq_4 = -24 + 88 q_{41} q_{42} q_{43} + \frac{44}{3} q_{41}^3 + \frac{44}{3} q_{42}^3 + \frac{44}{3} q_{43}^3 + \frac{100}{3} q_{32}^3 + 100 q_{31} q_{32}^2 + 44 q_{42}^2 q_{43} + 44 q_{41} q_{42}^2 + 44 q_{42} q_{43}^2 + 100 q_{31}^2 q_{32} + 44 q_{41}^2 q_{42} + 44 q_{41}^2 q_{43} \\ & + 44 q_{41} q_{43}^2 + \frac{100}{3} q_{31}^3 + \frac{100}{3} q_{21}^3; \end{aligned}$$

$$eq_4 = -\frac{328}{15} + 88 q_{41} q_{42} q_{43} + \frac{44}{3} q_{41}^3 + \frac{44}{3} q_{42}^3 + \frac{44}{3} q_{43}^3 + \frac{100}{3} q_{32}^3 + 100 q_{31} q_{32}^2 + 44 q_{42}^2 q_{43} + 44 q_{41} q_{42}^2 + 44 q_{42} q_{43}^2 + 100 q_{31}^2 q_{32} + 44 q_{41}^2 q_{42} + 44 q_{41}^2 q_{43} \quad (5)$$

$$+ 44 q_{41} q_{43}^2 + \frac{100}{3} q_{31}^3$$

$$\begin{aligned} > eq_5 = -96 - 48 q_{43} + 264 q_{41} q_{42} q_{43} + 276 q_{32} q_{42} q_{43} + 188 q_{32} q_{41} q_{42} + 276 q_{32} q_{41} q_{43} + 600 q_{31} q_{32} q_{21} + 188 q_{31} q_{32} q_{42} + 188 q_{31} q_{32} q_{41} + 276 q_{31} q_{32} q_{43} \\ & + 276 q_{21} q_{42} q_{43} + 276 q_{21} q_{41} q_{42} + 188 q_{21} q_{41} q_{43} + 276 q_{31} q_{42} q_{43} + 188 q_{31} q_{41} q_{42} + 276 q_{31} q_{41} q_{43} + 44 \alpha q_{41}^3 + 44 \alpha q_{43}^3 + 264 \alpha q_{42} q_{41} q_{43} + 44 \alpha q_{41}^3 \\ & + 44 \alpha q_{42}^3 + 44 \alpha q_{43}^3 + 200 q_{32}^3 - 96 q_{21} - 144 q_{21}^2 - 96 q_{31} - 96 q_{32} - 48 q_{42} - 48 q_{41} - 44 \alpha q_{32} q_{41}^2 - 44 \alpha q_{32} q_{42}^2 - 44 \alpha q_{43} q_{31} - 44 \alpha q_{43} q_{32} - 44 \alpha q_{31}^2 q_{41} \\ & - 56 \alpha q_{21}^2 q_{31} - 44 \alpha q_{31} q_{42}^2 - 56 \alpha q_{21} q_{31}^2 - 44 \alpha q_{32} q_{42}^2 - 44 \alpha q_{32} q_{41}^2 - 44 \alpha q_{31} q_{41}^2 - 44 \alpha q_{31} q_{42}^2 - 56 \alpha q_{32} q_{21}^2 - 56 \alpha q_{32} q_{21} + 300 \alpha q_{31} q_{32}^2 + 300 \alpha q_{31} q_{32} \\ & q_{32} - 44 \alpha q_{43} q_{32}^2 - 44 \alpha q_{43} q_{31}^2 - 72 q_{42}^2 + 100 \alpha q_{21}^3 + 100 \alpha q_{31}^3 + 100 \alpha q_{32}^3 - 288 q_{31} q_{32} - 144 q_{42} q_{43} - 144 q_{41} q_{42} - 144 q_{41} q_{43} - 144 q_{32}^2 - 144 q_{31}^2 \\ & - 72 q_{43}^2 - 72 q_{41}^2 + 132 \alpha q_{41}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{42}^2 q_{41} + 132 \alpha q_{42}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{41} q_{43}^2 + 132 \alpha q_{42} q_{43}^2 + 132 \alpha q_{42} q_{41}^2 + 600 q_{31} q_{32}^2 + 132 q_{42}^2 q_{43} + 132 q_{41} q_{42}^2 \\ & + 132 q_{42} q_{43}^2 + 600 q_{31}^2 q_{32} + 132 q_{41}^2 q_{42} + 132 q_{41}^2 q_{43} + 132 q_{41} q_{43}^2 + 94 q_{31} q_{41}^2 + 94 q_{31} q_{42}^2 + 182 q_{31} q_{43}^2 + 94 q_{32} q_{41}^2 + 94 q_{32} q_{42}^2 + 182 q_{32} q_{43}^2 + 300 q_{32} \\ & q_{21}^2 + 400 q_{32}^2 q_{21} + 94 q_{32}^2 q_{42} + 94 q_{32}^2 q_{41} + 138 q_{32}^2 q_{43} + 94 q_{31}^2 q_{42} + 94 q_{31}^2 q_{41} + 138 q_{31}^2 q_{43} + 94 q_{21} q_{41}^2 + 182 q_{21} q_{42}^2 + 94 q_{21} q_{43}^2 + 200 q_{21}^2 q_{31} + 200 \\ & q_{21}^2 q_{31} + 138 q_{21}^2 q_{42} + 94 q_{21}^2 q_{41} + 94 q_{21}^2 q_{43} + 44 \alpha q_{42}^3 + 200 q_{31}^3 + 200 q_{21}^3 - 112 \alpha q_{31} q_{32} q_{21} - 88 \alpha q_{43} q_{31} q_{32} - 88 \alpha q_{41} q_{43} q_{31} - 88 \alpha q_{32} q_{41} q_{42} \\ & - 88 \alpha q_{31} q_{32} q_{42} - 88 \alpha q_{31} q_{32} q_{41} - 88 \alpha q_{41} q_{43} q_{32} - 88 \alpha q_{42} q_{43} q_{31} - 88 \alpha q_{42} q_{43} q_{32} - 88 \alpha q_{31} q_{41} q_{42}; \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$eq_5 = -64 q_{31} - 48 q_{32} - \frac{648}{25} q_{42} - \frac{824}{25} q_{41} - \frac{824}{25} q_{43} + 276 q_{32} q_{42} q_{43} + 276 q_{32} q_{41} q_{43} + 188 q_{32} q_{41} q_{42} + 188 q_{31} q_{32} q_{42} + 188 q_{31} q_{32} q_{41} + 276 q_{31} q_{32} q_{43} \\ + 188 q_{31} q_{41} q_{42} + 276 q_{31} q_{42} q_{43} + 276 q_{31} q_{41} q_{43} + 16 q_{32}^2 + \frac{4}{5} q_{42}^2 - \frac{172}{5} q_{43}^2 - \frac{172}{5} q_{41}^2 - 64 q_{31}^2 - \frac{344}{5} q_{41} q_{43} - 48 q_{31} q_{32} - \frac{168}{5} q_{42} q_{43} \\ - \frac{168}{5} q_{41} q_{42} + 264 \alpha q_{42} q_{41} q_{43} + 44 \alpha q_{41}^3 + 44 \alpha q_{43}^3 - 44 \alpha q_{32}^2 q_{42} - 44 \alpha q_{32}^2 q_{41} - 44 \alpha q_{32}^2 q_{43} - 44 \alpha q_{43}^2 q_{31} - 44 \alpha q_{43}^2 q_{32} - 44 \alpha q_{41}^2 q_{31} - 44 \alpha q_{41}^2 q_{32} \\ - 44 \alpha q_{31}^2 q_{41} - 44 \alpha q_{31}^2 q_{42} - 44 \alpha q_{31}^2 q_{43} + 300 \alpha q_{31} q_{32}^2 + 300 \alpha q_{31} q_{32}^2 - 44 \alpha q_{43} q_{32}^2 - 44 \alpha q_{43} q_{31}^2 + 100 \alpha q_{31}^3 + 100 \alpha q_{32}^3 + 132 \alpha q_{42}^2 q_{41} + 132 \alpha q_{42}^2 q_{43} \\ + 132 \alpha q_{42}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{41}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{41}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{42}^2 q_{41} + 94 q_{31}^2 q_{41} + 94 q_{31}^2 q_{42} + 182 q_{31}^2 q_{43} + 94 q_{32}^2 q_{41} + 94 q_{32}^2 q_{42} + 138 q_{32}^2 q_{43} + 182 q_{32}^2 q_{43} + 94 \\ q_{32}^2 q_{42} + 94 q_{32}^2 q_{41} + 94 q_{31}^2 q_{42} + 94 q_{31}^2 q_{41} + 138 q_{31}^2 q_{43} + \frac{32}{5} \alpha + 44 \alpha q_{42}^3 - 88 \alpha q_{42} q_{43} q_{31} - 88 \alpha q_{43} q_{31} q_{32} - 88 \alpha q_{41} q_{43} q_{31} - 88 \alpha q_{32} q_{41} q_{42} \\ - 88 \alpha q_{31} q_{32} q_{42} - 88 \alpha q_{31} q_{32} q_{41} - 88 \alpha q_{41} q_{43} q_{32} - 88 \alpha q_{42} q_{43} q_{32} - 88 \alpha q_{31} q_{41} q_{42} - \frac{3616}{25} - \frac{224}{5} \alpha q_{31} q_{32} - \frac{224}{25} \alpha q_{31} - \frac{224}{25} \alpha q_{32} - \frac{112}{5} \alpha q_{31}^2 \\ - \frac{112}{5} \alpha q_{32}^2 + 44 q_{41}^3 + 44 q_{43}^3 + 200 q_{32}^3 + 264 q_{41} q_{42} q_{43} + 200 q_{31}^3 + 600 q_{31}^2 q_{32} + 132 q_{42}^2 q_{43} + 132 q_{41}^2 q_{42} + 132 q_{42}^2 q_{43} + 600 q_{31}^2 q_{32} + 132 q_{41}^2 q_{42} \\ + 132 q_{41}^2 q_{43} + 132 q_{41}^2 q_{43}$$

$$eq_6 = -24 - 48 q_{43} + 132 q_{32} q_{42} q_{43} + 44 q_{32} q_{41} q_{42} + 132 q_{32} q_{41} q_{43} + 800 q_{31} q_{32} q_{21} + 144 q_{31} q_{32} q_{42} + 144 q_{31} q_{32} q_{41} + 520 q_{31} q_{32} q_{43} + 176 q_{21} q_{42} q_{43} \\ + 176 q_{21} q_{41} q_{42} + 88 q_{21} q_{41} q_{43} + 132 q_{31} q_{42} q_{43} + 44 q_{31} q_{41} q_{42} + 132 q_{31} q_{41} q_{43} + 176 \alpha q_{43} q_{42} q_{21} + 176 \alpha q_{41} q_{42} q_{21} + 88 \alpha q_{21} q_{41} q_{43} \\ - 320 \alpha q_{21} q_{32} q_{42} - 232 \alpha q_{21} q_{32} q_{41} - 232 \alpha q_{21} q_{31} q_{42} - 144 \alpha q_{21} q_{31} q_{41} - 144 \alpha q_{21} q_{31} q_{43} - 232 \alpha q_{43} q_{32} q_{21} + 50 q_{32}^2 - 96 q_{21} - 72 q_{21}^2 - 96 q_{31} \\ - 96 q_{32} - 48 q_{42} - 48 q_{41} + 22 \alpha q_{32}^2 q_{41} + 22 \alpha q_{32}^2 q_{42} + 110 \alpha q_{43}^2 q_{31} + 110 \alpha q_{43}^2 q_{32} - 16 \alpha q_{31}^2 q_{41} + 16 \alpha q_{31}^2 q_{42} + 22 \alpha q_{31}^2 q_{43} + 16 \alpha q_{21}^2 q_{31} - 16 \alpha \\ q_{32}^2 q_{42} - 16 \alpha q_{32}^2 q_{41} + 22 \alpha q_{31}^2 q_{41} - 16 \alpha q_{31}^2 q_{42} - 96 \alpha q_{32}^2 q_{21} + 216 \alpha q_{32}^2 q_{21} + 150 \alpha q_{31}^2 q_{32} + 150 \alpha q_{31}^2 q_{32} - 104 \alpha q_{43}^2 q_{32} - 104 \alpha q_{43}^2 q_{31} + 44 \alpha q_{21}^2 q_{43} \\ + 50 \alpha q_{21}^2 q_{42} + 50 \alpha q_{21}^2 q_{41} + 50 \alpha q_{21}^2 q_{43} + 132 \alpha q_{42}^2 q_{21} + 44 \alpha q_{21}^2 q_{41} + 50 \alpha q_{31}^3 + 50 \alpha q_{31}^3 + 50 \alpha q_{32}^3 - 144 q_{31} q_{32} - 72 q_{31} q_{42} - 72 q_{31} q_{41} - 216 q_{31} q_{43} \\ - 72 q_{32} q_{42} - 72 q_{32} q_{41} - 216 q_{32} q_{43} - 504 q_{32} q_{21} - 288 q_{42} q_{21} - 144 q_{21} q_{41} - 144 q_{21} q_{43} - 216 q_{21} q_{31} - 72 q_{21}^2 - 72 q_{21}^2 + 150 q_{31}^2 q_{32} + 150 q_{31}^2 q_{32} \\ + 22 q_{31}^2 q_{41} + 22 q_{31}^2 q_{42} + 110 q_{31}^2 q_{43} + 22 q_{32}^2 q_{41} + 22 q_{32}^2 q_{42} + 110 q_{32}^2 q_{43} + 600 q_{32}^2 q_{21} + 600 q_{32}^2 q_{21} + 72 q_{32}^2 q_{42} + 72 q_{32}^2 q_{41} + 260 q_{32}^2 q_{43} + 72 q_{31}^2 q_{42} \\ + 72 q_{31}^2 q_{41} + 260 q_{31}^2 q_{43} + 44 q_{21}^2 q_{41} + 132 q_{21}^2 q_{42} + 44 q_{21}^2 q_{43} + 200 q_{21}^2 q_{31} + 200 q_{21}^2 q_{31} + 310 q_{21}^2 q_{42} + 122 q_{21}^2 q_{41} + 122 q_{21}^2 q_{43} + 50 q_{31}^3 + 50 q_{31}^3 \\ + 404 q_{32} q_{21} q_{41} + 216 q_{21} q_{31} q_{41} + 680 q_{32} q_{21} q_{43} + 592 q_{32} q_{42} q_{21} + 232 \alpha q_{31} q_{32} q_{21} - 208 \alpha q_{43} q_{31} q_{32} + 132 \alpha q_{41} q_{43} q_{31} + 44 \alpha q_{32} q_{41} q_{42} \\ - 32 \alpha q_{31} q_{32} q_{42} - 32 \alpha q_{31} q_{32} q_{41} + 132 \alpha q_{41} q_{43} q_{32} + 132 \alpha q_{42} q_{43} q_{31} + 132 \alpha q_{42} q_{43} q_{32} + 44 \alpha q_{31} q_{41} q_{42} + 404 q_{21} q_{43} q_{31} + 404 q_{31} q_{42} q_{21}; \\ eq_6 = -\frac{752}{5} q_{31} - \frac{1008}{5} q_{32} - \frac{568}{5} q_{42} - \frac{2152}{25} q_{41} - \frac{2152}{25} q_{43} + 132 q_{32} q_{42} q_{43} + 132 q_{32} q_{41} q_{43} + 44 q_{32} q_{41} q_{42} + 144 q_{31} q_{32} q_{42} + 144 q_{31} q_{32} q_{41} \\ + 520 q_{31} q_{32} q_{43} + 44 q_{31} q_{41} q_{42} + 132 q_{31} q_{42} q_{43} + 132 q_{31} q_{41} q_{43} + 168 q_{32}^2 + \frac{264}{5} q_{42}^2 + \frac{88}{5} q_{43}^2 + \frac{88}{5} q_{41}^2 + 8 q_{31}^2 + \frac{176}{5} q_{41} q_{43} + 176 q_{31} q_{32} \\ + \frac{352}{5} q_{42} q_{43} + \frac{352}{5} q_{41} q_{42} - 16 \alpha q_{32}^2 q_{42} + 22 \alpha q_{32}^2 q_{41} + 22 \alpha q_{32}^2 q_{42} + 110 \alpha q_{43}^2 q_{31} + 110 \alpha q_{43}^2 q_{32} - 16 \alpha q_{31}^2 q_{41} + 22 \alpha q_{31}^2 q_{42} + 22 \alpha q_{31}^2 q_{41} + 8 \alpha q_{43} \\ + 8 \alpha q_{41} - 16 \alpha q_{32}^2 q_{41} - 16 \alpha q_{31}^2 q_{42} + 150 \alpha q_{31}^2 q_{32} + 150 \alpha q_{31}^2 q_{32} - 104 \alpha q_{43}^2 q_{32} - 104 \alpha q_{43}^2 q_{31} + 50 \alpha q_{31}^3 + 50 \alpha q_{32}^3 + 22 q_{31}^2 q_{41} + 22 q_{31}^2 q_{42} + 110 q_{31}^2 \\ q_{43}^2 + 22 q_{32}^2 q_{41} + 22 q_{32}^2 q_{42} + 260 q_{32}^2 q_{43} + 110 q_{32}^2 q_{43} + 72 q_{32}^2 q_{42} + 72 q_{32}^2 q_{41} + 72 q_{31}^2 q_{42} + 72 q_{31}^2 q_{41} + 260 q_{31}^2 q_{43} + \frac{16}{5} \alpha + 132 \alpha q_{42} q_{43} q_{31} \\ - 208 \alpha q_{43} q_{31} q_{32} + 132 \alpha q_{41} q_{43} q_{31} + 44 \alpha q_{32} q_{41} q_{42} - 32 \alpha q_{31} q_{32} q_{42} - 32 \alpha q_{31} q_{32} q_{41} + 132 \alpha q_{41} q_{43} q_{32} + 132 \alpha q_{42} q_{43} q_{32} + 44 \alpha q_{31} q_{41} q_{42} \\ + \frac{176}{5} \alpha q_{41} q_{43} - \frac{288}{5} \alpha q_{31} q_{41} - \frac{464}{5} \alpha q_{31} q_{42} - 128 \alpha q_{32} q_{42} - \frac{464}{5} \alpha q_{32} q_{41} + \frac{464}{5} \alpha q_{31} q_{32} - \frac{288}{5} \alpha q_{43} q_{31} + \frac{352}{5} \alpha q_{42} q_{43} + \frac{352}{5} \alpha q_{41} q_{42}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{464}{5}\alpha q_{43}q_{32} + \frac{64}{25}\alpha q_{31} - \frac{384}{25}\alpha q_{32} + \frac{88}{5}\alpha q_{43}^2 + \frac{32}{5}\alpha q_{31}^2 + \frac{88}{5}\alpha q_{41}^2 + \frac{432}{5}\alpha q_{32}^2 + \frac{264}{5}\alpha q_{42}^2 + \frac{448}{5}q_{31}q_{42} + \frac{72}{5}q_{31}q_{41} - \frac{272}{5}q_{31}q_{43} \\
 & + \frac{824}{5}q_{32}q_{42} + \frac{448}{5}q_{32}q_{41} + 56q_{32}q_{43} - \frac{1768}{25} + 50q_{32}^3 + 50q_{31}^3 + 150q_{31}^2q_{32} + 150q_{31}^2q_{42} + 8\alpha q_{42} \\
 & \rightarrow \text{solve}(\{eq_1, eq_2, eq_3, eq_4, eq_5, eq_6\}, \{q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, q_{43}\}); \\
 & \left\{ q_{31} = -\text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right) + \frac{3}{5}, q_{32} = \text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right), \right. \\
 & \left. q_{41} = \frac{175}{33}\text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right) - \frac{39}{11} + \frac{17}{22}\alpha, q_{42} = \frac{90}{11} - \frac{153}{110}\alpha - \frac{125}{11}\text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right) - \frac{40}{11} \right. \\
 & \left. - 12000\right)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250), q_{43} = \frac{34}{55}\alpha + \frac{200}{33}\text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right) - \frac{40}{11} \right\} \\
 & \rightarrow \text{allvalues}\left(\text{RootOf}\left(20000_Z^2 + (-1440\alpha - 12000)_Z - 612\alpha^2 + 2835\alpha - 2250\right)\right); \\
 & \frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}, \frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \rightarrow q_{31} := -\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) + \frac{3}{5}; \\
 & q_{31} = -\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \rightarrow q_{32} := \left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right); \\
 & q_{32} = \frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \rightarrow q_{41} := \frac{175}{33}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) - \frac{39}{11} + \frac{17}{22}\alpha, \\
 & q_{41} = \frac{53}{55}\alpha - \frac{43}{22} - \frac{7}{440}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \rightarrow q_{42} := \frac{90}{11} - \frac{153}{110}\alpha - \frac{125}{11}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right); \\
 & q_{42} = \frac{105}{22} - \frac{9}{5}\alpha + \frac{3}{88}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \rightarrow q_{43} := \frac{34}{55}\alpha + \frac{200}{33}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) - \frac{40}{11}; \\
 & q_{43} = \frac{46}{55}\alpha - \frac{20}{11} - \frac{1}{55}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}
 \end{aligned}$$

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.



LAMPIRAN B

Galat Metode RKKuCCL

$$\begin{aligned}
 & \text{restart,} \\
 & q_{21} = \frac{2}{5}; \\
 & q_{31} = -\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) + \frac{3}{5}; \\
 & q_{32} = \left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right); \\
 & q_{41} = \frac{175}{33}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) - \frac{39}{11} + \frac{17}{22}\alpha; \\
 & q_{42} = \frac{90}{11} - \frac{153}{110}\alpha - \frac{125}{11}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right); \\
 & q_{43} = \frac{34}{55}\alpha + \frac{200}{33}\left(\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}\right) - \frac{40}{11}; \\
 & \text{mytaylor}(f(x_n + r, y_n + s), [r, s], 6); \\
 & g := f + s \cdot f_y + \frac{1}{2} s^2 \cdot f_{yy} + \frac{1}{6} s^3 \cdot f_{yyy} + \frac{1}{24} s^4 \cdot f_{yyyy}; \\
 & k_1 := f; \\
 & k_2 := \text{subs}(s = q_{21} \cdot k_1 \cdot h, g); k_2 := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(k_2), h), h, 6); \\
 & k_3 := \text{subs}(s = (q_{31} \cdot k_1 + q_{32} \cdot k_2) \cdot h, g); k_3 := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(k_3), h), h, 6); \\
 & k_4 := \text{subs}(s = (q_{41} \cdot k_1 + q_{42} \cdot k_2 + q_{43} \cdot k_3) \cdot h, g); k_4 := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(k_4), h), h, 6); \\
 & y_{n+1} := y_n + \frac{h}{36} \cdot \left((1-\alpha) \cdot \left(11 \cdot \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \cdot \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \cdot \frac{k_3 + k_4}{2} \right) + \alpha \cdot \left(11 \cdot \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 14 \cdot \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + 11 \cdot \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4} \right) \right); y_{n+1} \\
 & := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}), h), h, 6); \text{simplify}(y_{n+1}); \\
 & y_n + f \cdot h + \frac{1}{2} f_y f_y h^2 + \frac{1}{6} f(f_{yy} f + f_y^2) h^3 + \frac{1}{24} f(f_{yyy} f^2 + f_y^3 + 4 f_{yy} f f_y) h^4 + \frac{1}{99000000} f(852500 f_{yyy} f^3 - 3301200 f_y^2 f_{yy} \alpha + 28800 f \\
 & f_y^2 f_{yy} \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} + 7700 f_{yyy} f_y^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} + 679932 f_{yyy} \alpha^2 f_y^2 + 14557500 f_{yy} f_y^2 - 13200 \\
 & f_y^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f^2 + 21309 f_y^4 \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} - 12036 f_{yy} \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f_y^2 - 4259883 f_y^4 \alpha^2 + 5129400 f_y^4 \alpha \\
 & - 21804 f_y^4 \alpha^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} + 1414248 f_y^4 \alpha^3 + 6820000 f_{yyy} f_y^2 f_y - 430100 f_{yyy} f_y^2 \alpha f_y + 1320000 f_{yy}^2 f_y^2 + 1077450 f_y^2 f_y^2 \alpha) h^5 + O(h^6) \\
 & y_{n+1} := y_n + f \cdot h + \frac{1}{2} f_y f_y h^2 + \frac{1}{6} f(f_{yy} f + f_y^2) h^3 + \frac{1}{24} f(f_{yyy} f^2 + 4 f_{yy} f f_y + f_y^3) h^4 + \frac{1}{99000000} f(852500 f_{yyy} f^3 + 6820000 f_{yyy} f_y^2 f_y - 430100 f_{yyy} f_y^2 \alpha f_y \\
 & + 1320000 f_{yy}^2 f_y^2 + 1077450 f_y^2 f_y^2 \alpha + 28800 f_y^2 f_y^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} - 3301200 f_y^2 f_y^2 \alpha + 7700 f_{yyy} f_y^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & + 679932 f_{yyy} \alpha^2 f_y^2 + 14557500 f_{yy} f_y^2 - 13200 f_y^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f^2 + 21309 f_y^4 \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & - 12036 f_{yy} \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} f_y^2 + 5129400 f_y^4 \alpha - 4259883 f_y^4 \alpha^2 - 21804 f_y^4 \alpha^2 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} + 1414248 f_y^4 \alpha^3) h^5 + O(h^6).
 \end{aligned}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$y_{n+1}^1 = y_n + f h + \frac{1}{2} f f_y h^2 + \frac{1}{6} f (f_{yy} f + f_y^2) h^3 + \frac{1}{24} f (f_{yyy} f^2 + f_y^3 + 4 f_{yy} f_y f) h^4 + \frac{1}{99000000} f (852500 f_{yyy} f^3 - 3301200 f_y^2 f_{yy} \alpha + 28800 f$$

(8)

$$f_y^2 f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + 7700 f_{yyy} f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + 679932 f_{yyy} \alpha^2 f_y^2 + 14557500 f_{yyy} f_y f_{yy} - 13200 f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f^2 + 21309 f_y^4 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 12036 f f_{yy} \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 - 4259883 f_y^4 \alpha^2 + 5129400 f_y^4 \alpha$$

$$- 21804 f_y^4 \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + 1414248 f_y^4 \alpha^3 + 6820000 f_{yyy} f_y^2 f_y - 430100 f_{yyy} f_y^2 \alpha f_y + 1320000 f_{yyy}^2 f_y^2 + 1077450 f_y^2 f_y^2 \alpha) h^5$$

$$> y_{n+1}^2 = y_n + h \cdot f + \frac{1}{2} h^2 f f_y + \frac{1}{6} h^3 (f_y^2 + f_{yy} f^2) + \frac{1}{24} h^4 (f_y^3 f_{yy} + 4 f_y^2 f_y f_{yy} + f_y f_y^2) + \frac{1}{120} h^5 (f_y^4 f_{yyy} + 11 f_y^2 f_y^2 f_{yy} + 4 f_y^2 f_y^2 + 7 f_y^3 f_y f_{yyy} + f_y f_y^4) :$$

$$> \text{galat} := \text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}^1 - y_{n+1}^2), [f_y f_{yy} f_{yyy} f_{yyyy}]), h)$$

$$\text{galat} = \left(\left(-\frac{1419961}{33000000} f \alpha^2 + \frac{5357}{375000} f \alpha^3 + \frac{8549}{165000} f \alpha + \frac{7103}{33000000} f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1817}{8250000} f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1}{120} f \right) f_y^4 \right.$$

$$+ \left(\frac{1717}{250000} f_y^2 \alpha^2 - \frac{917}{27500} f_y^2 \alpha - \frac{1003}{8250000} f_y^2 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{731}{13200} f_y^2 + \frac{2}{6875} f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right) f_{yy} f_y^2$$

$$+ \left(\frac{7}{90000} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{391}{90000} f_y^3 \alpha + \frac{19}{1800} f_y^3 \right) f_{yyy} f_y + \left(-\frac{1}{50} f_y^3 - \frac{1}{7500} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{653}{60000} f_y^3 \alpha \right) f_{yy}^2$$

$$+ \left. \frac{1}{3600} f_y^4 f_{yyy} \right) h^5$$

$$> \text{galat1} := \text{simplify}(\text{galat});$$

$$\text{galat1} = \left(-\frac{1419961}{33000000} f_y^4 f \alpha^2 + \frac{5357}{375000} f_y^4 f \alpha^3 + \frac{8549}{165000} f_y^4 f \alpha + \frac{7103}{33000000} f_y^4 f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1817}{8250000} f_y^4 f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right.$$

$$- \frac{1}{120} f_y^4 f + \frac{1717}{250000} f_{yy} f_y^2 f_y^2 - \frac{917}{27500} f_{yy} f_y^2 f_y^2 - \frac{1003}{8250000} f_{yy} f_y^2 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{731}{13200} f_{yy} f_y^2 f_y^2$$

(10)

$$+ \frac{2}{6875} f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2 + \frac{7}{90000} f_{yyy} f_y^3 f_y \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{391}{90000} f_{yyy} f_y^3 \alpha f_y + \frac{19}{1800} f_{yyy} f_y^3 f_y - \frac{1}{50} f_y^2 f_y^3 - \frac{1}{7500}$$

$$f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^3 + \frac{653}{60000} f_y^2 f_y^3 \alpha + \frac{1}{3600} f_y^4 f_{yyy} \Big) h^5$$

$$> \text{collect} \left(-\frac{1419961}{33000000} f_y^4 f \alpha^2 + \frac{5357}{375000} f_y^4 f \alpha^3 + \frac{8549}{165000} f_y^4 f \alpha + \frac{7103}{33000000} f_y^4 f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1817}{8250000} f_y^4 f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right.$$

$$- \frac{1}{120} f_y^4 f + \frac{1717}{250000} f_{yy} f_y^2 f_y^2 - \frac{917}{27500} f_{yy} f_y^2 f_y^2 - \frac{1003}{8250000} f_{yy} f_y^2 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{731}{13200} f_{yy} f_y^2 f_y^2$$

$$+ \frac{2}{6875} f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2 + \frac{7}{90000} f_{yyy} f_y^3 f_y \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{391}{90000} f_{yyy} f_y^3 \alpha f_y + \frac{19}{1800} f_{yyy} f_y^3 f_y - \frac{1}{50} f_y^2 f_y^3 - \frac{1}{7500}$$

$$f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^3 + \frac{653}{60000} f_{yy} f_y^2 f_y^2 \alpha + \frac{1}{3600} f_y^4 f_{yyy} [f_y f_{yy} f_{yyy} f_{yyyy}]),$$

$$\left(-\frac{1419961}{33000000} f \alpha^2 + \frac{5357}{375000} f \alpha^3 + \frac{8549}{165000} f \alpha + \frac{7103}{33000000} f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1817}{8250000} f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1}{120} f \right) f_y^4$$

$$+ \left(\frac{1717}{250000} f_y^2 \alpha^2 - \frac{917}{27500} f_y^2 \alpha - \frac{1003}{8250000} f_y^2 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{731}{13200} f_y^2 + \frac{2}{6875} f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right) f_{yy} f_y^2$$

$$+ \left(\frac{7}{90000} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{391}{90000} f_y^3 \alpha + \frac{19}{1800} f_y^3 \right) f_{yyy} f_y + \left(-\frac{1}{50} f_y^3 - \frac{1}{7500} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{653}{60000} f_y^3 \alpha \right) f_{yy}^2$$

$$+ \left. \frac{1}{3600} f_y^4 f_{yyy} \right)$$

(11)

$$> \text{expand} \left(99000000 \cdot \left(\left(-\frac{1419961}{33000000} f \alpha^2 + \frac{5357}{375000} f \alpha^3 + \frac{7103}{33000000} f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1817}{8250000} f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{1}{120} f \right. \right. \right.$$

$$+ \frac{8549}{165000} f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \left(\frac{1717}{250000} f_y^2 \alpha^2 - \frac{917}{27500} f_y^2 \alpha - \frac{1003}{8250000} f_y^2 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{2}{6875} f_y^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{731}{13200} f_y^2 \right) f_{yy} f_y^2$$

$$+ \left(\frac{19}{1800} f_y^3 + \frac{7}{90000} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - \frac{391}{90000} f_y^3 \alpha \right) f_{yyy} f_y + \left(-\frac{1}{7500} f_y^3 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} + \frac{653}{60000} f_y^3 \alpha - \frac{1}{50} f_y^3 \right) f_{yy}^2$$

$$+ \left. \frac{1}{3600} f_y^4 f_{yyy} \right) \Big)$$

$$- 4259883 f_y^4 f \alpha^2 + 1414248 f_y^4 f \alpha^3 + 5129400 f_y^4 f \alpha + 21309 f_y^4 f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 21804 f_y^4 f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 825000 f_y^4 f$$

$$+ 679932 f_{yy} \alpha^2 f_y^2 f_y^2 - 3301200 f_{yy} \alpha^2 f_y^2 - 12036 f_{yy} \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2 + 5482500 f_{yy} f_y^2 f_y^2 + 28800 f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2$$

$$+ 7700 f_{yyy} f_y^3 f_y \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 430100 f_{yyy} f_y^3 \alpha f_y + 1045000 f_{yyy} f_y^3 f_y - 1980000 f_{yyy} f_y^3 f_y - 13200 f_{yy}^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^3 + 1077450$$

$$f_{yy}^2 f_y^3 \alpha + 27500 f_y^4 f_{yyy}$$

$$> \text{galat1} = \frac{h^5}{99000000} \left(-4259883 f_y^4 f \alpha^2 + 1414248 f_y^4 f \alpha^3 + 5129400 f_y^4 f \alpha + 21309 f_y^4 f \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 21804 f_y^4 f \alpha^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right.$$

$$- 825000 f_y^4 f + 679932 f_{yy} \alpha^2 f_y^2 f_y^2 - 3301200 f_{yy} \alpha^2 f_y^2 - 12036 f_{yy} \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2 + 5482500 f_{yy} f_y^2 f_y^2$$

$$+ 28800 f_{yy} \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^2 f_y^2 + 7700 f_{yyy} f_y^3 f_y \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 430100 f_{yyy} f_y^3 \alpha f_y + 1045000 f_{yyy} f_y^3 f_y - 1980000 f_{yyy} f_y^3 f_y - 13200$$

$$f_{yy}^2 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} f_y^3 + 1077450 f_{yy}^2 f_y^3 \alpha + 27500 f_y^4 f_{yyy} \Big) :$$

Asyikta Alifudus

LAMPIRAN C

Kestabilan Metode RKKuCCL

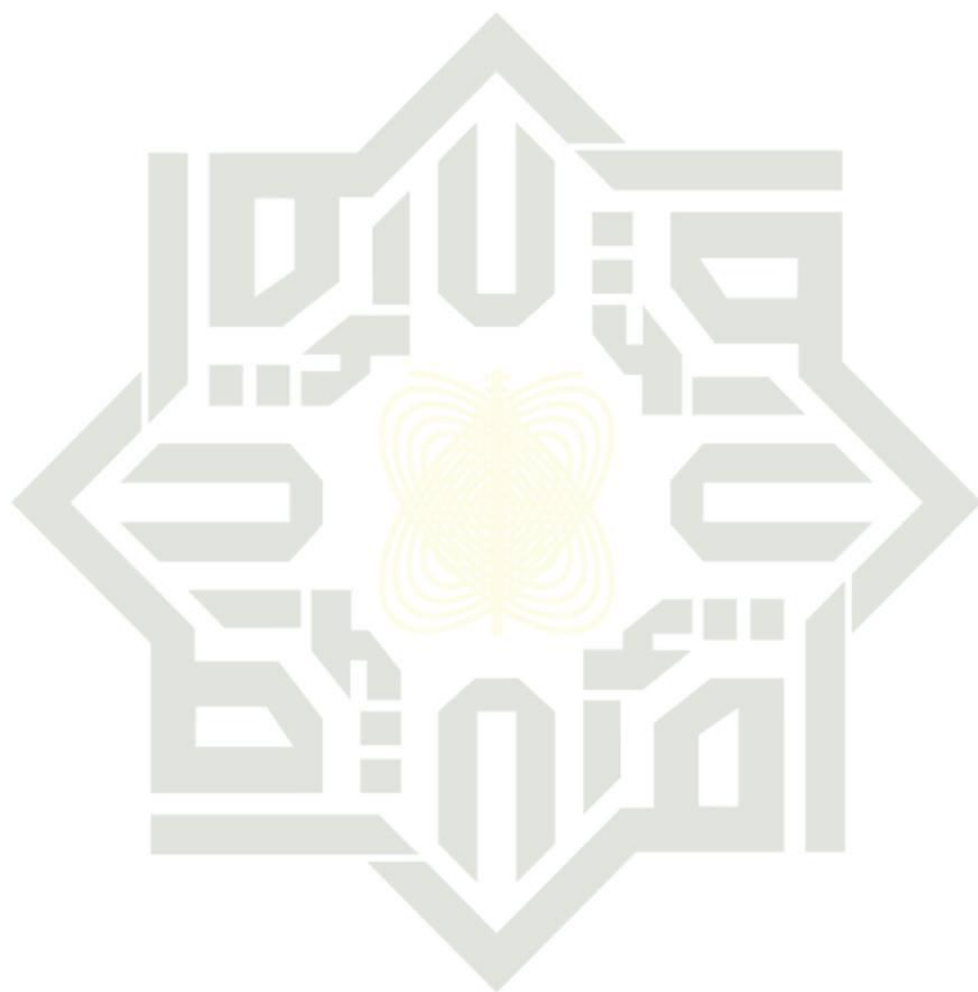
$$\begin{aligned}
 & \text{restart :} \\
 & q_{21} := \frac{2}{5}; \\
 & q_{31} := -\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}; \\
 & \quad q_{31} = -\frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} + \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \quad (1) \\
 & q_{32} := \frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}; \\
 & \quad q_{32} = \frac{9}{250}\alpha + \frac{3}{10} - \frac{3}{1000}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \quad (2) \\
 & q_{41} := \frac{53}{55}\alpha - \frac{43}{22} - \frac{7}{440}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}; \\
 & \quad q_{41} = \frac{53}{55}\alpha - \frac{43}{22} - \frac{7}{440}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \quad (3) \\
 & q_{42} := \frac{105}{22} - \frac{9}{5}\alpha + \frac{3}{88}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}; \\
 & \quad q_{42} = \frac{105}{22} - \frac{9}{5}\alpha + \frac{3}{88}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \quad (4) \\
 & q_{43} := \frac{46}{55}\alpha - \frac{20}{11} - \frac{1}{55}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500}; \\
 & \quad q_{43} = \frac{46}{55}\alpha - \frac{20}{11} - \frac{1}{55}\sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \quad (5) \\
 & k_1 := \lambda \cdot y_n; \\
 & \quad k_1 = \lambda \cdot y_n \quad (6) \\
 & k_2 := \lambda \cdot (y_n + h \cdot q_{21} \cdot k_1) : \text{expand}(k_2); \\
 & \quad k_2 = \lambda \cdot y_n + \frac{2}{5} h \lambda^2 y_n \quad (7) \\
 & k_3 := \lambda \cdot (y_n + (q_{31} \cdot k_1 + q_{32} \cdot k_2) \cdot h) : \text{expand}(k_3); \\
 & \quad k_3 = \lambda \cdot y_n + \frac{3}{5} h \lambda^2 y_n + \frac{9}{625} \alpha h^2 \lambda^3 y_n + \frac{3}{25} h^2 \lambda^3 y_n - \frac{3}{2500} \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} h^2 \lambda^3 y_n \quad (8) \\
 & k_4 := \lambda \cdot (y_n + (q_{41} \cdot k_1 + q_{42} \cdot k_2 + q_{43} \cdot k_3) \cdot h) : \text{expand}(k_4); \\
 & \quad k_4 = \lambda \cdot y_n + h \lambda^2 y_n + \frac{9}{11} h^2 \lambda^3 y_n - \frac{12}{55} \alpha h^2 \lambda^3 y_n + \frac{3}{1100} \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} h^2 \lambda^3 y_n + \frac{3072}{34375} \alpha^2 h^3 \lambda^4 y_n - \frac{597}{2750} \alpha h^3 \lambda^4 y_n \\
 & \quad - \frac{87}{68750} \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} h^3 \lambda^4 y_n + \frac{3}{11} h^3 \lambda^4 y_n \quad (9) \\
 & y_{n+1} := y_n + \frac{h}{36} \cdot \left((1 - \alpha) \cdot \left(11 \frac{k_1 + k_2}{2} + 14 \frac{k_2 + k_3}{2} + 11 \frac{k_3 + k_4}{2} \right) + \alpha \cdot \left(11 \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 14 \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + 11 \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4} \right) \right) : y_{n+1} \\
 & \quad := \text{simplify}(\text{series}(\text{collect}(\text{expand}(y_{n+1}), h), h, 6)); \\
 & y_{n+1} = y_n + \lambda y_n h + \frac{1}{2} \lambda^2 y_n h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 y_n h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 y_n h^4 - \frac{1}{33000000} \alpha \lambda^5 y_n (1419961 \alpha - 471416 \alpha^2 - 7103 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \quad + 7268 \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} - 1709800) h^5 + O(h^6) \quad (10) \\
 & \text{kestabilan} := y_n + \lambda y_n h + \frac{1}{2} \lambda^2 y_n h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 y_n h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 y_n h^4 - \frac{1}{33000000} \alpha (1419961 \alpha - 471416 \alpha^2 - 7103 \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} \\
 & \quad + 7268 \alpha \sqrt{3544\alpha^2 - 13350\alpha + 22500} - 1709800) \lambda^5 y_n h^5;
 \end{aligned}$$

Activate Windows

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\begin{aligned}
 & \text{kestabilann} = 1 + \lambda h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 h^4 - \frac{1}{33000000} \alpha \left(1419961 \alpha - 471416 \alpha^2 - 7103 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right. \\
 & \quad \left. + 7268 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 1709800 \right) \lambda^5 h^5, \\
 & \text{kestabilann} = 1 + \lambda h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 h^4 - \frac{1}{33000000} \alpha \left(1419961 \alpha - 471416 \alpha^2 - 7103 \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} \right. \\
 & \quad \left. + 7268 \alpha \sqrt{3544 \alpha^2 - 13350 \alpha + 22500} - 1709800 \right) \lambda^5 h^5
 \end{aligned} \tag{11}$$



UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LAMPIRAN D

**Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y' = y$
Menggunakan Metode RKKuCCL, RKKu, RKKuG dan RKKuH**

metode RKKuCCL $\alpha=0,2$

n	x	eksak	RK KuCCL	Error
1	0.1000	1.10517092	1.10517096	4.050411428480061e-08
2	0.2000	1.22140276	1.22140285	8.952794017247356e-08
3	0.3000	1.34985881	1.34985896	1.484155165432100e-07
4	0.4000	1.49182470	1.49182492	2.186993541819504e-07
5	0.5000	1.64872127	1.64872157	3.021252130697150e-07
6	0.6000	1.82211880	1.82211920	4.006800065070593e-07
7	0.7000	2.01375271	2.01375322	5.166232148745564e-07
8	0.8000	2.22554093	2.22554158	6.525222433495515e-07
9	0.9000	2.45960311	2.45960392	8.112921974223752e-07
10	1.0000	2.71828183	2.71828282	9.962406211094788e-07

metode RKKuCCL $\alpha=0,01$

n	x	eksak	RK KuCCL	Error
1	0.1000	1.10517092	1.10517084	7.696838677517803e-08
2	0.2000	1.22140276	1.22140259	1.701264393805246e-07
3	0.3000	1.34985881	1.34985853	2.820281799209568e-07
4	0.4000	1.49182470	1.49182428	4.155857755705483e-07
5	0.5000	1.64872127	1.64872070	5.741166213546478e-07
6	0.6000	1.82211880	1.82211804	7.613963657338019e-07
7	0.7000	2.01375271	2.01375173	9.817186068517003e-07
8	0.8000	2.22554093	2.22553969	1.239962075683110e-06
9	0.9000	2.45960311	2.45960157	1.541666224902372e-06
10	1.0000	2.71828183	2.71827994	1.893116241991066e-06

UIN SUSKA RIAU

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

metode RK Kuntzmann

n	x	Solusi eksak	RKKu	Error
1	0.1000	1.10517092	1.10517083	8.474231427690881e-08
2	0.2000	1.22140276	1.22140257	1.873094752635751e-07
3	0.3000	1.34985881	1.34985850	3.105134653846875e-07
4	0.4000	1.49182470	1.49182424	4.575605845325015e-07
5	0.5000	1.64872127	1.64872064	6.321032899325729e-07
6	0.6000	1.82211880	1.82211796	8.382985756671957e-07
7	0.7000	2.01375271	2.01375163	1.080873699876861e-06
8	0.8000	2.22554093	2.22553956	1.365200152481094e-06
9	0.9000	2.45960311	2.45960141	1.697376879050694e-06
10	1.0000	2.71828183	2.71827974	2.084323879714134e-06

Metode RK Kuntzman Geometri (RKKuG)

n	x	Solusi eksak	Solusi Numerik	Galat
0	0.00	1.00000000000000	1.00000000000000	0.000000e+00
1	0.10	1.105170918076	1.105170735162	1.82914e-07
2	0.20	1.221402758160	1.221402353858	4.04302e-07
3	0.30	1.349858807576	1.349858137342	6.70234e-07
4	0.40	1.491824697641	1.491823710010	9.87631e-07
5	0.50	1.648721270700	1.648719906324	1.36438e-06
6	0.60	1.822118800391	1.822116990948	1.80944e-06
7	0.70	2.013752707470	2.013750374437	2.33303e-06
8	0.80	2.225540928492	2.225537981749	2.94674e-06
9	0.90	2.459603111157	2.459599447421	3.66374e-06
10	1.00	2.718281828459	2.718277329510	4.49895e-06

metode RK Kuntzmann Harmonik (RKKuH)

n	x	Solusi eksak	RKKuH	Error
1	0.1000	1.10517092	1.10517062	3.000024400012791e-07
2	0.2000	1.22140276	1.22140210	6.631078539598434e-07
3	0.3000	1.34985881	1.34985771	1.099271124571644e-06
4	0.4000	1.49182470	1.49182308	1.619843084110784e-06
5	0.5000	1.64872127	1.64871903	2.237754031853001e-06
6	0.6000	1.82211880	1.82211583	2.967720410529395e-06
7	0.7000	2.01375271	2.01374888	3.826477486867930e-06
8	0.8000	2.22554093	2.22553610	4.833041215235312e-06
9	0.9000	2.45960311	2.45959710	6.009002855744683e-06
10	1.0000	2.71828183	2.71827445	7.378860335194304e-06

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Diarangi mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Diarangi mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

LAMPIRAN E

Tabel Penyelesaian Eksak, Numerik dan Galat untuk $y'=1/y$ Menggunakan Metode RKKuCCL, RKKu, RKKuCoH dan RKKuH

metode RKKuCCL alpha=0,9

n	x	eksak	RK KuCCL	Error
1	0.1000	1.09544512	1.09544605	9.312014239704070e-07
2	0.2000	1.18321596	1.18321724	1.287455722032149e-06
3	0.3000	1.26491106	1.26491249	1.422621399793655e-06
4	0.4000	1.34164079	1.34164225	1.463425147507635e-06
5	0.5000	1.41421356	1.41421502	1.461388032142352e-06
6	0.6000	1.48323970	1.48324114	1.439442475881236e-06
7	0.7000	1.54919334	1.54919475	1.408478147446601e-06
8	0.8000	1.61245155	1.61245292	1.373898805834273e-06
9	0.9000	1.67332005	1.67332139	1.338453878618751e-06
10	1.0000	1.73205081	1.73205211	1.303547840780794e-06

metode RKKuCCL alpha=0,3

n	x	eksak	RK KuCCL	Error
1	0.1000	1.09544512	1.09544632	1.209801415269496e-06
2	0.2000	1.18321596	1.18321763	1.675177891957702e-06
3	0.3000	1.26491106	1.26491292	1.852914202959966e-06
4	0.4000	1.34164079	1.34164269	1.907380345000931e-06
5	0.5000	1.41421356	1.41421547	1.905660154122302e-06
6	0.6000	1.48323970	1.48324158	1.877712545006460e-06
7	0.7000	1.54919334	1.54919518	1.837807416027459e-06
8	0.8000	1.61245155	1.61245334	1.793047663012359e-06
9	0.9000	1.67332005	1.67332180	1.747059565015974e-06
10	1.0000	1.73205081	1.73205251	1.701703449263903e-06

metode RK Kuntzmann

n	x	Solusi eksak	RKKu	Error
1	0.1000	1.09544512	1.09544523	1.139113483539234e-07
2	0.2000	1.18321596	1.18321611	1.579208230850782e-07
3	0.3000	1.26491106	1.26491124	1.748102032017584e-07
4	0.4000	1.34164079	1.34164097	1.800403912621817e-07
5	0.5000	1.41421356	1.41421374	1.799412192582395e-07
6	0.6000	1.48323970	1.48323987	1.773466029586501e-07
7	0.7000	1.54919334	1.54919351	1.736093331317079e-07
8	0.8000	1.61245155	1.61245172	1.694041897870591e-07
9	0.9000	1.67332005	1.67332022	1.650764622773693e-07
10	1.0000	1.73205081	1.73205097	1.608037911715599e-07

Hak Cipta Diindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

metode RK Kuntzmann Kontra Harmonik (RKKuCoH)

n	x	Solusi eksak	RKKuCoH	Error
1	0.1000	1.09544512	1.09544599	8.789927892216554e-07
2	0.2000	1.18321596	1.18321717	1.214886800715576e-06
3	0.3000	1.26491106	1.26491241	1.342149530847436e-06
4	0.4000	1.34164079	1.34164217	1.380443954257515e-06
5	0.5000	1.41421356	1.41421494	1.378379920868866e-06
6	0.6000	1.48323970	1.48324105	1.357578900851308e-06
7	0.7000	1.54919334	1.54919467	1.328301395542297e-06
8	0.8000	1.61245155	1.61245285	1.295635636555659e-06
9	0.9000	1.67332005	1.67332132	1.262168632720773e-06
10	1.0000	1.73205081	1.73205204	1.229220683018895e-06

metode RK Kuntzmann Harmonik (RKKuH)

n	x	Solusi eksak	RKKuH	Error
1	0.1000	1.09544512	1.09544499	1.228678947473583e-07
2	0.2000	1.18321596	1.18321579	1.710691976963830e-07
3	0.3000	1.26491106	1.26491087	1.898998245319916e-07
4	0.4000	1.34164079	1.34164059	1.959591495737101e-07
5	0.5000	1.41421356	1.41421337	1.961179685316949e-07
6	0.6000	1.48323970	1.48323950	1.934808400161359e-07
7	0.7000	1.54919334	1.54919315	1.895421433140143e-07
8	0.8000	1.61245155	1.61245136	1.850534296909956e-07
9	0.9000	1.67332005	1.67331987	1.804027340845948e-07
10	1.0000	1.73205081	1.73205063	1.757919041445177e-07

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Mardiah Munthe, dilahirkan di Balai Jaya, pada tanggal 09 Mei 1998, sebagai anak bungsu dari sembilan bersaudara pasangan bapak Sahnun Munthe dan ibu Patimah Siregar. Penulis menyelesaikan Pendidikan formal Sekolah Dasar di SDN 018 Balai Jaya pada tahun 2010, Sekolah Menengah Pertama Penulis selesai di SMPN 4 Bagan Sinembah pada tahun 2013 dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 1 Bagan Sinembah pada tahun 2016.

Setelah menyelesaikan SMA, pada tahun yang sama penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika. Pada bulan Februari 2019, penulis melaksanakan Kerja Praktek di Kantor Dinas Komunikasi, Informatika, Statistik, dan Persandian Kota Pekanbaru dengan judul **“Analisis Pengaruh Jumlah Produksi, Nilai Produksi dan Investasi Terhadap Penyerapan Tenaga Kerja”** yang dibimbing oleh Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd. M.Sc. Pada bulan Juli -Agustus 2019 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Rokan Hilir, Kecamatan Tanah Putih Tanjung Melawan, Desa Batu Hampar.

Penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul **“Modifikasi Metode Runge-Kutta Kunzmann Menggunakan Kombinasi Rata-Rata Lehmer dengan $p = 1$ dan $p = 2$ ”** pada tanggal 19 Desember 2019 dibawah bimbingan Bapak Wartono, M.Sc.

UIN SUSKA RIAU